Université Claude Bernard - Lyon 1 **Semestre printemps 2022-2023**

M1 - Mathématiques générales UE : Analyse Fonctionnelle 2

Feuille d'exercices n° 7

Exercice 1.

1. Déterminer l'ensemble des points extrémaux de la boule unité fermée de $L^1([0,1])$.
2. Montrer qu'il n'existe pas d'espace de Banach X tel que $L^1([0,1])$ soit isométrique à X^*.

   (en fait il n'existe pas d'espace de Banach X tel que $L^1([0,1])$ soit isomorphe à X^*, mais c'est plus difficile à démontrer)
3. Les espaces ℓ^1 et $L^1([0,1])$ sont-ils isomorphes ? On pourra s'intéresser à la convergence faible de la suite de fonctions $(x \mapsto \cos(2\pi nx))_{n\in\mathbf{N}}$ dans $L^1([0,1])$.
4. Reprendre les deux premières questions de cet exercice avec $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ au lieu de $L^1([0,1])$.
5. L'espace $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ est-il réflexif ?

Exercice 2. Soit X un espace de Banach séparable.

1. Rappeler pourquoi il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui est dense dans B_X.

   Pour tout $u \in \ell^1$ on pose $T(u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x_n$.
2. Montrer que T est bien définie et $\|T\| = 1$.
3. Soit $x \in X$ tel que $\|x\| < 1$. Montrer qu'il existe $\varphi\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante et telle que pour tout $N \in \mathbf{N}$ on ait $\left\| x - \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^{n+1}} x_{\varphi(n)} \right\| \leq \frac{1}{2^N}$.
4. Montrer que T est surjective.

(On peut même montrer que X est isométrique à $\ell^1/\ker(T)$, muni de la norme quotient définie à l'exercice 9).

Exercice 3. Soit X un espace vectoriel normé. En utilisant le théorème de Banach–Alaoglu, montrer qu'il existe un espace topologique compact K et une application linéaire isométrique $T\colon X \to (C(K,\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$.
Dans le cas où X est séparable, montrer qu'il existe un compact K comme ci-dessus qui est de plus métrisable.

Exercice 4. Soit X un espace de Banach réflexif, et $\varphi \in X^*$. Montrer qu'il existe $x \in B_X$ tel que $\varphi(x) = \|\varphi\|$.

Exercice 5. Soit X, Y deux espaces de Banach, et $T\colon X \to Y$ un isomorphisme linéaire continu. On suppose que X est réflexif. Montrer que Y est réflexif.
(On pourra commencer par montrer que $T^{**} \circ i_X = i_Y \circ T$)
L'exercice suivant améliore considérablement ce résultat...

Exercice 6. Soit X, Y deux espaces de Banach, et $T\colon X \to Y$ une surjection linéaire et continue. On suppose que X est réflexif ; montrer que que Y est réflexif.

Exercice 7. Soit X un espace de Banach non réflexif. Montrer qu'il existe un convexe $C \subseteq X^*$ qui est fermé en norme mais n'est pas fermé pour $\sigma(X^*, X)$.

Exercice 8. Soit X un espace de Banach réflexif et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'élements de X

1. On suppose $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ bornée. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une sous-suite faiblement convergente.

   Ce résultat reste-t-il vrai quand X n'est pas réflexif ?

2. On suppose que $(\varphi(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy pour tout $\varphi \in X^*$. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge faiblement.

Exercice 9. Soit X un espace de Banach réflexif, et F un sous-espace vectoriel fermé. On munit le quotient $Y = X/F$ de la norme quotient, définie par $\|x + F\| = \inf\{\|x + f\| : f \in F\}$

1. Montrer que l'on a bien défini une norme sur Y, et que Y est un espace de Banach.
2. Montrer que Y/F est réflexif (on pourra commencer par essayer de montrer que $(Y/F)^*$ est réflexif).