Chapitre 7

Deuxième partie

7.2 Principe du prolongement analytique

Exercice 7.2.1 *Soit* $U = \mathbb{C} \setminus \{iy : y \in \mathbb{R}, |y| \geq 1\}$*. Montrer qu'il existe* f *holomorphe sur* U *telle que, pour tout* $z \in U$*, on ait :*

$$z\cos(f(z)) - \sin(f(z)) = 0.$$

Indication : Considérer la fonction arctan *définie sur* $\mathbb{R}$*.*

Exercice 7.2.2 *Soient* U *un domaine de* $\mathbb{C}$*, symétrique par rapport à l'axe réel (i.e.* $z \in U \Rightarrow \overline{z} \in U$*) et* f *une fonction holomorphe sur* U*.*

a) *Montrer que la fonction* $f^* : U \to \mathbb{C}$ *définie par* $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$*,* $z \in U$*, est holomorphe sur* U*.*

b) *Montrer que* $I = U \cap \mathbb{R}$ *est non vide et même contient un segment non réduit à un point.*

c) *Montrer qu'il existe deux fonctions* g *et* h *holomorphes sur* U*, à valeurs réelles sur* I *et telles que* $f = g + ih$*. Y a-t-il unicité du couple* (g, h) *?*

d) *Montrer que* $\overline{g(\overline{z})} = g(z)$ *et* $\overline{h(\overline{z})} = h(z)$ *pour tout* $z \in U$*. Calculer* $\overline{f(\overline{z})}$*.*

Exercice 7.2.3 *Soit* f *une fonction holomorphe sur un disque ouvert de centre 0 et de rayon* $r > 1$ *et ne prenant que des valeurs réelles sur le cercle unité. Que peut-on dire de* f *?*

7.3 Principe du maximum

Exercice 7.3.1 (Lemme de Schwarz) *Soit $D = D(0, 1[$ et soit f holomorphe sur D. On suppose que*

$$f(0) = 0 \text{ et } f(D) \subset D.$$

1. *En considérant $g : z \longmapsto \frac{f(z)}{z}$, montrer que $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in D$ et $|f'(0)| \leq 1$.*

2. *On suppose de plus qu'il existe $z_0 \neq 0$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$ (resp. $|f'(0)| = 1$). Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ tel que $f(z) = \lambda z$ pour tout $z \in D$.*

Exercice 7.3.2 *Soit $R > 0$ et f une fonction holomorphe sur le disque ouvert $D(0, R)$. Pour $r \in [0, R[$, on pose :*

$$M(r) := \sup_{|z|=r} |f(z)|.$$

a) *Montrer que M est une fonction croissante.*

b) *Montrer que s'il existe $r_1 \neq r_2$ tels que $M(r_1) = M(r_2)$, alors f est constante sur $D(0, R)$.*

c) *Soit P un polynôme de degré $n \geqslant 1$. Pour $r > 0$, on pose $s(r) = \dfrac{M(r)}{r^n}$.*

   (i) Montrer que s est décroissante et que si P n'est pas de la forme $a_n z^n$, alors s est strictement décroissante. (Pour comparer $s(r_1)$ et $s(r_2)$, on pourra considérer $f(z) = z^n P\left(\dfrac{r_1 r_2}{z}\right)$.)

   (ii) Montrer que, pour tout $r > 0$, on a $|a_n| \leqslant s(r)$, puis que $\lim\limits_{r \to +\infty} s(r) = |a_n|$. Redémontrer le résultat du (i), en considérant la fonction $f(z) = \dfrac{P(z)}{z^n}$.

   (iii) En déduire que si P n'est pas de la forme $a_n z^n$, alors il existe z de module 1 tel que $|P(z)| > |a_n|$.

   (iv) Montrer que si P est majoré par 1 sur le disque unité, alors $|P(z)|$ est majoré par $|z|^n$ hors du disque unité.

Exercice 7.3.3 *Soit* $0 < r < R$ *et* $f : D(0,R) \to \mathbb{C}$ *une fonction holomorphe telle que* $f(z) \neq 0$, $\forall z \in \overline{D(0,r)}$.

a) *Montrer qu'il existe* $\rho \in]r, R[$ *tel que* $f(z) \neq 0$, $\forall z \in \overline{D(0,\rho)}$.

b) *En déduire que*

$$\ln|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(re^{it}|\, dt\,.$$

(On montrera qu'il existe une détermination holomorphe de $\log f$ *sur* $D(0,\rho)$*).*