Feuille de TD 8.

Exercice 1. Soit $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$ et U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$. Soit $f\colon U \to \mathbb{R}^2$ une fonction qui vérifie

$$\forall x, y \in U \ \|f(x) - f(y)\| \leqslant \|x - y\|^2 \ .$$

Montrer que f est constante sur U (on pourra commencer par montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle).

Exercice 2. Rechercher les points critiques de $(x, y) \mapsto y(x^2 + (\ln(y))^2)$ sur $\mathbb{R}^2$, et étudier leur nature. Même question sur $\mathbb{R}^3$ pour $(x, y, z) \mapsto z(e^x - 1) - y^2$.

Exercice 3. Chercher les extrema éventuels des fonctions $(x, y) \mapsto f(x, y)$ suivantes :

1. $3xy - x^3 - y^3$
2. $-2(x - y)^2 + x^4 + y^4$
3. $x^2y^2(1 + 3x + 2y)$
4. $2x + y - x^4 - y^4$
5. $\frac{xy}{(x+y)(1+x)(1+y)}$, $x, y > 0$
6. $xe^y + ye^x$
7. $x(\ln^2 x + y^2)$, $x > 0$
8. $\sqrt{x^2 + (1 - y)^2} + \sqrt{y^2 + (1 - x)^2}$

Exercice 4. Montrer que la fonction f définie par $f(x, y) = (x^3 + 3xe^y, y - x^2)$ définit un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5. Trouver le plus grand ouvert U tel que l'application $(x, y, z) \mapsto (x, xy, xyz)$ définisse un difféomorphisme de classe C^1 de U dans $\mathbb{R}^3$. Déterminer l'image de U.

Exercice 6. On pose $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \neq 0 \text{ et } y \neq 0\}$. Montrer que l'application $(x, y) \mapsto (x^2y, xy^2)$ définit un difféomorphisme de classe C^1 de U sur U. Cette application est-elle un difféomorphisme de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$?

Exercice 7. On fixe un entier n et une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$. Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on ait $|||Df_x||| < 1$. On définit une fonction g en posant $g(x) = x + f(x)$.

1. Montrer que pour tout $r > 0$ il existe $C_r \in [0, 1[$ tel que
$$\forall x, y \in B(0, r) \quad \|g(x) - g(y)\| \geqslant (1 - C_r)\|x - y\|$$
2. Montrer que g est injective.
3. Montrer que g est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.
4. On suppose de plus que $\|g(x)\| \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$. Montrer que g est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ (on pourra prouver que $g(\mathbb{R}^n)$ est à la fois ouvert et fermé dans $\mathbb{R}^n$). Ce résultat est-il vrai sans l'hypothèse que $\|g(x)\| \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$?