Feuille d'exercices n° 8

Exercice 1. On note c_0 l'espace des suites réelles qui convergent vers 0, et on le munit de $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que c_0^* est isométrique à ℓ_1.

Exercice 2. On rappelle que c désigne l'espace de toutes les suites réelles convergentes, et c_0 le sous-espace de c formé des suites de limite nulle. On les munit tous les deux de $\|\cdot\|_\infty$.

1. Déterminer l'ensemble des points extrémaux de la boule unité de c, ainsi que ceux de c_0. Ces deux espaces de Banach sont-ils linéairement isométriques ?
2. Construire un isomorphisme linéaire de c sur c_0.
3. Soit $X = \left\{ \frac{1}{n} \colon n \in \mathbf{N} \right\} \cup \{0\}$. Rappeler pourquoi X est compact, et justifier que $C(X)$ et c sont isométriques.
4. Montrer à l'aide du théorème de Riesz que c^* est isométrique à ℓ^1 ; puis donner une autre preuve de ce résultat en utilisant le résultat du premier exercice de cette feuille.

Exercice 3. Soit X un espace métrisable compact. On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes sur X.

1. Expliquer pourquoi on peut identifier $\mathbb{P}$ à $\{\varphi \in C(X)^* \colon \varphi(1) = 1\}$.
2. Montrer que $\mathbb{P}$ est convexe et $*$-faiblement compact.
3. Montrer que les points extrémaux de $\mathbb{P}$ sont exactement les mesures de Dirac.
4. Soit μ une mesure de probabilité borélienne sur X, $f_1, \dots, f_n \in C(X)$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ positifs de somme 1 ainsi que $x_1, \dots, x_m \in X$ tels que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \left| \int_X f_i d\mu - \sum_{i=1}^m \alpha_i f(x_m) \right| < \varepsilon$$

Exercice 4. Soit K un compact convexe d'un espace de Banach E et μ une mesure de probabilité borélienne sur K.

1. Montrer qu'il qu'il existe un point $x \in K$ tel que l'on ait $\int_K f d\mu = f(x)$ pour tout $f \in E^*$ (on pourra commencer par considérer le cas où μ est une combinaison convexe de mesures de Dirac, puis utiliser l'exercice précédent).
2. Montrer qu'un tel point x est unique. On l'appelle le *barycentre* de la mesure μ.

Exercice 5. Soit X un compact métrisable.

1. On note δ_x la mesure de Dirac en x. Montrer que $\pm\delta_x$ est un point extrémal de la boule unité B de $C(X)^*$.
2. Montrer que $x \mapsto \delta_x$ est un homéomorphisme de X sur $\{\delta_x \colon x \in X\}$ muni de la topologie $*$-faible.
3. Montrer que $B = \overline{\mathrm{co}}(\{\pm\delta_x \colon x \in X\})$, où l'adhérence est calculée pour la topologie $*$-faible, puis déterminer l'ensemble des points extrémaux de B (on pourra utiliser un des résultats de la feuille 6).

Exercice 6. Soit K, L deux espaces compacts métrisables, et $T\colon C(K) \to C(L)$ une isométrie linéaire et surjective.

1. Montrer que $T^*\colon C(L)^* \to C(K)^*$ est une isométrie linéaire surjective.
2. Soit E_K l'ensemble des points extrémaux de la boule unité de $C(K)^*$, et E_L l'ensemble des points extrémaux de la boule unité de $C(L)^*$. Montrer que $T^*(E_L) = E_K$.
3. On note δ_x la mesure de Dirac en un point x. Montrer qu'il existe deux applications $f\colon L \to \{-1, 1\}$ et $g\colon L \to K$ telles que pour tout $x \in L$ on ait $T^*(\delta_x) = f(x)\delta_{g(x)}$.
4. Montrer que δ et g sont continues.
5. Montrer que g est un homéomorphisme de L sur K.
6. Énoncer le résultat démontré dans cet exercice (*théorème de Banach–Stone*).

Remarque : on peut montrer que si T est une isométrie surjective d'un espace vectoriel normé sur un autre, alors T est affine (*théorème de Mazur–Ulam*).

Exercice 7. Soit X un espace compact métrisable, et $Y \subseteq X$ un fermé. On considère l'application $T\colon C(X) \to C(Y)$ définie par $T(f) = f_{|Y}$ pour toute $f \in C(X)$.

1. Montrer que T est continue et déterminer sa norme.
2. Identifier l'adjoint T^* (on pensera à appliquer le théorème de Riesz). Montrer que $T(C(X))$ est dense dans $C(Y)$.
3. Montrer que T est surjective.

On vient de montrer un cas particulier du *théorème de Tietze* : toute fonction continue de Y dans $\mathbf{R}$ s'étend en une fonction continue de X dans $\mathbf{R}$.