Chapitre 8

Points singuliers isolés

8.1 Nature des singularités

Exercice 8.1.1 *1. Trouver l'ordre des pôles dans les cas suivants :*

$$f(z) = \frac{z}{\sin z}, \quad f(z) = \frac{1}{z(e^z - 1)}.$$

2. Calculer, sans utiliser la partie singulière, les résidus de f en chacune de ses singularités isolées :

$$\begin{array}{lll} f(z) = \frac{z}{\sin z} & f(z) = \frac{1}{z(e^z-1)} & f(z) = \frac{z}{e^z+1} \\ f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2} & f(z) = \frac{1}{\sin(z^2)} & f(z) = \frac{e^{iz}}{1+\cos(z)} \end{array}$$

Pour chacune des singularités isolés de f, donner l'expression de la partie singulière associée et (re)trouver le résidu correspondant :

$$\begin{array}{lll} f(z) = e^{1/z} & f(z) = z\cos(1/z) & f(z) = \frac{e^{z^2}}{z^{2n+1}} \\ f(z) = \frac{1}{z(e^z-1)} & f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2} & f(z) = \frac{1}{\sin(z^2)} \\ f(z) = \frac{e^{iz}}{1+\cos z} & & \end{array}$$

Exercice 8.1.2 *Déterminer les singularités des fonctions suivantes, leur nature et les résidus correspondants :*

$$\textbf{a)}\ \frac{\sin z}{z^3 - \pi^2 z}, \qquad \textbf{b)}\ cotanz - \frac{1}{z}, \qquad \textbf{c)}\ \frac{\exp\left(\frac{1}{z}\right)}{z-1}, \quad \textbf{d)}\ \pi\ cotan(\pi\, z).$$

Exercice 8.1.3 *Soit U un ouvert connexe. Même question que ci-dessus avec :*

a) $\dfrac{f'}{f}$, *lorsque f est une fonction holomorphe sur U.*

b) $\dfrac{g}{h}$, *lorsque g et h sont deux fonctions holomorphes sur U et que h a un ple simple.*

c) $\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^n}$, *lorsque f est une fonction holomorphe sur U, $z_o \in U$ et $n \in \mathbb{N}$.*

8.2 Divers

Exercice 8.2.1 *Soit f une fonction entière.*

1. *Montrer que si f ne prend aucune valeur dans un voisinage $a \in \mathbb{C}$, alors f est constante.*

2. *Pour $z \neq 0$, soit $g(z) = f(\frac{1}{z})$.*

   (a) *Montrer que si g présente en 0 une fausse singularité alors f est constante.*

   (b) *Montrer que si 0 est un pôle d'ordre n pour g alors f est un polynôme de degré n.*

   (c) *Que peut-on dire d'une fonction entière f vérifiant $f(z) \to \infty$ quand $z \to \infty$?*