Feuille de TD 9.

Exercice 1. Calculer $\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \right) dx$, et $\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \right) dy$.
Qu'en déduisez-vous ?

Exercice 2. Soit $D = [0, 1]^2$. Calculer $\iint_D \frac{dx\,dy}{(x + y + 1)^2}$.

Exercice 3. On veut calculer $I = \int_0^1 \frac{\ln(1 + x)}{1 + x^2} dx$.
On pose $J = \iint_D \frac{x}{(1 + x^2)(1 + xy)} dxdy$, $D = [0, 1]^2$.
Calculer J de deux manières différentes , et en déduire la valeur de I.

Exercice 4.

1. Montrer l'existence de $I = \int_{x=0}^{\pi/2} \frac{\ln(1 + \cos x)}{\cos x} dx$.
2. Montrer que $I = \iint_D \frac{\sin y}{1 + \cos x \cos y} dxdy$ où $D = [0, \frac{\pi}{2}]^2$.
3. En déduire la valeur de I.

Exercice 5. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\iint_A (x + y)e^{-x}e^{-y} dxdy$ où $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.
2. $\iint_B (x^2 + y^2) dxdy$ où $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < x, x^2 + y^2 > y\}$.

Exercice 6. On note D le domaine délimité par les droites $x = 0$, $y = x + 2$ et $y = -x$.

1. Calculer (directement) $I = \iint_D (x - y) dxdy$.
2. Calculer I au moyen du changement de variable $u = x + y$ et $v = x - y$.

Exercice 7. Soit D le disque de centre $(0, 1)$ et de rayon 1 du plan. Calculer $\iint_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy$.

Exercice 8. Soit $D = \{(x^2 + y^2)^2 \leq xy\}$. Calculer $\iint_D \sqrt{xy}\, dx\, dy$.

Exercice 9. Soient $0 < a \leq b, 0 < c \leq d$, et $D = \{ax^2 \leq y \leq bx^2, \frac{c}{x} \leq y \leq \frac{d}{x}\}$. Calculer l'aire de D.
(Indication : poser $u = \frac{y}{x^2}$ et $v = xy$.)

Exercice 10. Soit $p > 0$ et $D = \{y^2 - 2px \leq 0, x^2 - 2py \leq 0\}$. Calculer $\iint_D e^{\frac{x^3 + y^3}{xy}}\, dx\, dy$.
(Indication : poser $x = u^2 v$ et $y = uv^2$)

Exercice 11. Soit $R > 0$, $D_R = \{x^2 + y^2 \leq R^2, x > 0, y > 0\}$ et $K_R = [0, R]^2$. Montrer que :

$$\iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy \leq \iint_{K_R} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy \leq \iint_{D_{2R}} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy.$$

En déduire l'existence et la valeur de

$$\lim_{R\to+\infty} \int_0^R e^{-t^2}\, dt.$$

Exercice 12.

1. Calculer $A = \displaystyle\iint_{0\leq y\leq x\leq 1} \frac{dxdy}{(1+x^2)(1+y^2)}$.
2. Démontrer la convergence des intégrales :

$$B = \int_{\theta=0}^{\pi/4} \frac{\ln(2\cos^2\theta)}{2\cos 2\theta} d\theta, \quad C = \int_{\theta=0}^{\pi/4} \frac{\ln(2\sin^2\theta)}{2\cos 2\theta} d\theta, \quad D = \int_{t=0}^{1} \frac{\ln t}{1-t^2}\, dt\ .$$

3. Démontrer que $A = B$ (passer en coordonnées polaires dans A).
4. Calculer $B + C$ et $B - C$ en fonction de D.
5. En déduire les valeurs de C et D.

Exercice 13. Calculer $\displaystyle\iint_D f(x, y) dxdy$ dans les cas suivants :

1. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$: $f(x, y) = (x + y)^2$ et $f(x, y) = |xy|\sqrt{x^2 + 4y^2}$.
2. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0, x + y \leq 1, y - x \leq 1\}$: $f(x, y) = x^2y$.
3. D est le triangle de sommets $(0, 0)$, $(1, 1)$ et $(2, -1)$, et $f(x, y) = (x + 2y)^2$.
4. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, y \geq 2, x + y \leq 5\}$, et $f(x, y) = \dfrac{1}{(x + y)^4}$.
5. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$, $f(x, y) = xy^2$.
6. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1\}$, $f(x, y) = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}}$

Exercice 14. Justifier la convergence des intégrales suivantes, et les calculer :

1. $\displaystyle\iint_T ye^{-x}\, dxdy$, $T = \{(x, y) \colon 1 \leq x, 0 \leq y \leq x\}$.
2. $\displaystyle\iint_B \frac{1}{(x^2 + y^2)^{2/3}}\, dxdy$, $B = \{(x, y) \colon (x^2 + y^2) \leq 9\}$.

Exercice 15. On fixe deux réels a, b tels que $0 < a < b$, et on introduit le domaine $D = \{(x, y) \colon 0 < x < 1,\ a < y < b\}$. Montrer que $(x, y) \mapsto x^y$ est intégrable sur D, et prouver que

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln(x)}\, dx = \ln\left(\frac{1 + b}{1 + a}\right)\ .$$

Exercice 16. Soit $I = \{(x, y) \colon 0 < x < 1\,, -x \leq y \leq x\}$; pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $I_n = \{(x, y) \colon \frac{1}{n} < x < 1\,, -x \leq y \leq x\}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

1. Calculer $\displaystyle\iint_{I_n} e^{\frac{y}{x}}\, dxdy$.
2. Montrer que $\displaystyle\iint_I e^{\frac{y}{x}}\, dxdy$ existe et donner sa valeur.