
Feuille d'exercices n^o 9

Dans cette feuille on note $\sigma(T)$ le spectre d'une application linéaire continue T, et $\rho(T)$ le complémentaire de $\sigma(T)$.

Exercice 1.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{C}^N$ une suite bornée. On définit $T\colon \ell^2 \to \ell^2$ en posant $T((x_n)_{n\in\mathbf{N}}) = (u_n x_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
   (a) Montrer que T est bien définie et continue.
   (b) Montrer que chaque u_n est une valeur propre de T.
   (c) Montrer que si $x \notin \overline{\{u_n : n \in \mathbf{N}\}}$ alors $x \notin \sigma(T)$.
2. Ètant donnée une partie A de $\mathbf{C}$, donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une application linéaire continue $T\colon \ell^2 \to \ell^2$ telle que $A = \sigma(T)$.

Exercice 2.

1. On définit $T\colon \ell^2 \to \ell^2$ en posant $T(x)(n) = x(n+1)$ pour tout $x \in \ell^2$.
   (a) Montrer que T est bien définie, continue et déterminer sa norme.
   (b) Montrer que tout $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $|\lambda| < 1$ est valeur propre de T.
   (c) Déterminer $\sigma(T)$ ainsi que l'ensemble des valeurs propres de T.
2. On définit $S\colon \ell^2 \to \ell^2$ en posant pour $x \in \ell^2$ $S(x)(0) = 0$ et $S(x)(n) = x(n-1)$ pour $n \geq 1$.
   (a) Montrer que S est bien définie, continue et déterminer sa norme.
   (b) Montrer que S n'a pas de valeur propre.
   (c) Montrer que $T^* = S$ puis déterminer le spectre de S.

Exercice 3. Pour $f \in L^2([0,1],\mathbf{C})$ et $t \in [0,1]$ on pose $T(f)(t) = tf(t)$.

1. Montrer que $T\colon L^2([0,1],\mathbf{C}) \to L^2([0,1],\mathbf{C})$ est linéaire et continue.
2. Montrer que T n'a pas de valeur propre.
3. Soit $\lambda \in [0,1[$ et soit $\varepsilon > 0$ tel que $[\lambda, \lambda+\varepsilon] \subseteq [0,1]$. On note f_ε la fonction caractéristique de $[\lambda, \lambda+\varepsilon]$ et on pose $g_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} f_\varepsilon$. En considérant $(T - \lambda id)(g_\varepsilon)$, montrer que $\lambda \in \sigma(T)$.
4. Montrer que si $\lambda \in \mathbf{C} \setminus [0,1]$ alors $\lambda \notin \sigma(T)$, puis déterminer $\sigma(T)$.

Exercice 4. Soit $E = C([0,1],\mathbf{C})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. Soit K une fonction continue de $[0,1]^2$ dans $\mathbf{C}$. Pour $x \in [0,1]$ on pose $T(f)(x) = \int_0^x K(x,y)f(y)dy$.

1. Montrer que $T\colon E \to E$ est bien définie et continue.
2. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.
3. Déterminer $\sigma(T)$.
4. Montrer que T est compact (indication : Ascoli...).

Exercice 5. Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et $P\colon E \to E$ un projecteur continu. On suppose que $P \notin \{0, id\}$. Montrer que $\sigma(P) = \mathrm{vp}(P) = \{0,1\}$.

Exercice 6. Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et $S, T\colon E \to E$ des applications linéaires continues.

1. Montrer que $\sigma(ST) \setminus \{0\} = \sigma(TS) \setminus \{0\}$ (on pourra considérer $I + T(\lambda I - ST)^{-1}S$).
2. Montrer que si S ou T est inversible alors $\sigma(ST) = \sigma(TS)$.
3. Donner un exemple où on n'a pas $\sigma(ST) = \sigma(TS)$.

Exercice 7. Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et $T\colon E \to E$ une application linéaire continue de rang fini. On note $F = \mathrm{Im}(T)$.

1. On note $T_F\colon F \to F$ la restriction de T à F. Montrer que T et T_F ont les mêmes valeurs propres.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $S = \lambda id_F - T_F$. Montrer que si S est inversible alors $\lambda \notin \sigma(T)$ (on pourra considérer $(\lambda I - T)(I + S^{-1}T)$).
3. Montrer que tout élément de $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est une valeur propre de T.
4. Montrer que si E est de dimension infinie alors 0 est une valeur propre de T, puis que $\sigma(T)$ coïncide avec l'ensemble des valeurs propres de T.

Exercice 8. Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Soit A, B deux applications continues, linéaires, inversibles de E dans E.

1. Montrer que $A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B - A)B^{-1}$.
2. Montrer que $A \mapsto A^{-1}$ est différentiable sur $Gl(E)$. Quelle est sa différentielle ?

Exercice 9. Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, et soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\rho(T)$ convergeant vers $\lambda \in \mathbf{C}$. On suppose de plus que $(T - \lambda_n I)^{-1}$ est bornée dans $L(E)$. Montrer que $\lambda \in \rho(T)$.

Exercice 10. Soit H un espace de Hilbert séparable. On dit que $T\colon H \to H$ est un *opérateur de Hilbert-Schmidt* s'il existe une base orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de H telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \|T(e_n)\|^2 < +\infty$.

1. Montrer que tout opérateur de Hilbert-Schmidt est compact.
2. Étant donnée une suite bornée $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ on définit $S\colon \ell^2 \to \ell^2$ en posant $S(x) = (u_n x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ (cf. exercice 1).
   (a) Montrer que S est compact si, et seulement si, $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0.
   (b) Donner un exemple d'opérateur compact qui n'est pas de Hilbert-Schmidt.

Exercice 11. Soit E un espace de Banach réel ou complexe,S_E la sphère unité de E et $T \in \mathcal{L}(E)$ telle que $O \notin \overline{T(S_E)}$

1. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in E$ on ait $T(x) \geq \delta\|x\|$.
2. Montrer que $T(E)$ est fermé dans E.
3. Montrer que si T est de plus compact alors T est de rang fini.