
Exercices sur les intégrales doubles.

Exercice 1. Calculer $\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \right) dx$, et $\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \right) dy$.
Qu'en déduisez-vous ?

Exercice 2. Soit $D = [0, 1]^2$. Calculer $\iint_D \frac{dx dy}{(x + y + 1)^2}$.

Exercice 3. On veut calculer $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$.

On pose $J = \iint_D \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)} dx dy$, $D = [0, 1]^2$.

Calculer J de deux manières différentes, et en déduire la valeur de I .

Exercice 4. 1. Montrer l'existence de $I = \int_{x=0}^{\pi/2} \frac{\ln(1+\cos x)}{\cos x} dx$.

2. Montrer que $I = \iint_D \frac{\sin y}{1+\cos x \cos y} dx dy$ où $D = [0, \frac{\pi}{2}]^2$.

3. En déduire la valeur de I .

Exercice 5. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\iint_A (x+y)e^{-x}e^{-y} dx dy$ où $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x, y \geq 0, x+y \leq 1\}$.

2. $\iint_B (x^2 + y^2) dx dy$ où $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < x, x^2 + y^2 > y\}$.

3. $\iint_C \frac{xy}{1+x^2+y^2} dx dy$ où $C = \{(x, y) \in [0, 1]^2 / x^2 + y^2 \geq 1\}$.

4. $\iint_D \frac{1}{y \cos(x) + 1} dx dy$ où $D = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{1}{2}]$.

Exercice 6. On note D le domaine délimité par les droites $x = 0$, $y = x + 2$ et $y = -x$.

1. Calculer (directement) $I = \iint_D (x - y) dx dy$.

2. Calculer I au moyen du changement de variable $u = x + y$ et $v = x - y$.

Exercice 7. Soit D le disque de centre $(0, 1)$ et de rayon 1 du plan. Calculer $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$.

Exercice 8. Soit $D = \{x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 - 2y \geq 0, x^2 + y^2 - 1 \leq 0\}$. Calculer $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$.

Exercice 9. Calculer à l'aide d'un changement de variables approprié :

1. $\iint_A x^2 y dx dy$, avec $A = \{(x, y) : y \geq 0, x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$.
2. $\iint_C (x^2 - y) dx dy$, avec C le carré de sommets $(1, 0)$, $(2, 1)$, $(1, 2)$ et $(0, 1)$.

Exercice 10. Soit $D = \{(x^2 + y^2)^2 \leq xy\}$. Calculer $\iint_D \sqrt{xy} dx dy$.

Exercice 11. Soient $0 < a \leq b, 0 < c \leq d$, et $D = \{ax^2 \leq y \leq bx^2, \frac{c}{x} \leq y \leq \frac{d}{x}\}$. Calculer l'aire de D .
(Indication : poser $u = \frac{y}{x^2}$ et $v = xy$.)

Exercice 12. Soit $p > 0$ et $D = \{y^2 - 2px \leq 0, x^2 - 2py \leq 0\}$. Calculer $\iint_D e^{\frac{x^3+y^3}{xy}} dx dy$.
(Indication : poser $x = u^2v$ et $y = uv^2$)

Exercice 13. Soit $R > 0$, $D_R = \{x^2 + y^2 \leq R^2, x > 0, y > 0\}$ et $K_R = [0, R]^2$. Montrer que :

$$\iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \iint_{K_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \iint_{D_{2R}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

En déduire l'existence et la valeur de

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R e^{-t^2} dt.$$

Exercice 14. 1. Calculer $A = \iint_{0 \leq y \leq x \leq 1} \frac{dx dy}{(1+x^2)(1+y^2)}$.

2. Démontrer la convergence des intégrales :

$$B = \int_{\theta=0}^{\pi/4} \frac{\ln(2 \cos^2 \theta)}{2 \cos 2\theta} d\theta, \quad C = \int_{\theta=0}^{\pi/4} \frac{\ln(2 \sin^2 \theta)}{2 \cos 2\theta} d\theta, \quad D = \int_{t=0}^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt .$$

3. Démontrer que $A = B$ (passer en coordonnées polaires dans A).

4. Calculer $B + C$ et $B - C$ en fonction de D .

5. En déduire les valeurs de C et D .

Exercice 15. Calculer $\iint_D f(x, y) dx dy$ dans les cas suivants :

1. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$: $f(x, y) = (x + y)^2$ et $f(x, y) = |xy| \sqrt{x^2 + 4y^2}$.

2. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0, x + y \leq 1, y - x \leq 1\}$: $f(x, y) = x^2 y$.

3. D est le triangle de sommets $(0, 0)$, $(1, 1)$ et $(2, -1)$, et $f(x, y) = (x + 2y)^2$.

4. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, y \geq 2, x + y \leq 5\}$, et $f(x, y) = \frac{1}{(x + y)^4}$.

5. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$, $f(x, y) = xy^2$.

6. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$, $f(x, y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$

Exercice 16. Justifier la convergence des intégrales suivantes, et les calculer :

1. $\iint_T ye^{-x} dx dy$, $T = \{(x, y) : 1 \leq x, 0 \leq y \leq x\}$.

2. $\iint_B \frac{1}{(x^2 + y^2)^{2/3}} dx dy$, $B = \{(x, y) : (x^2 + y^2) \leq 9\}$.

Exercice 17. On pose $I = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt$, $J = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} dx dy$. Calculer J ; en déduire la valeur de I .

Exercice 18. Soit $A = [0, 1] \times]0, +\infty[$. Montrer que la fonction $f : (x, y) \mapsto e^{-y} \sin(2xy)$ est intégrable sur A , et calculer $\iint_A f(x, y) dx dy$.

En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{y} (\sin(y))^2 e^{-y} dy$.

Exercice 19. On fixe deux réels a, b tels que $0 < a < b$, et on introduit le domaine $D = \{(x, y) : 0 < x < 1, a < y < b\}$. Montrer que $(x, y) \mapsto x^y$ est intégrable sur D , et prouver que

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln(x)} dx = \ln \left(\frac{1+b}{1+a} \right) .$$

Exercice 20. Soit $I = \{(x, y) : 0 < x < 1, -x \leq y \leq x\}$; pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $I_n = \{(x, y) : \frac{1}{n} < x < 1, -x \leq y \leq x\}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

1. Calculer $\iint_{I_n} e^{\frac{y}{x}} dx dy$.

2. Montrer que $\iint_I e^{\frac{y}{x}} dx dy$ existe et donner sa valeur.