

Théorie descriptive des groupes

Julien Melleray

Lyon, Semestre d'automne 2009-2010

Avant-propos.

Ce texte a servi de support pour un cours de M2 au semestre d'automne 2009-2010 à Lyon. Il traite de *théorie descriptive des ensembles*, avec un intérêt particulier pour les groupes polonais, leurs actions et les relations d'équivalence engendrées.

Dans les premiers chapitres sont regroupés quelques rappels de théorie des ensembles et de topologie ; ensuite on passe à la théorie descriptive des ensembles proprement dite. A la fin de chaque chapitre, le lecteur trouvera de brèves références bibliographiques. Les exercices qu'on trouve dans le corps du texte sont *à faire absolument* pour vérifier qu'on a compris ce qui se passe. Les exercices en fin de chapitre sont là pour permettre au lecteur intéressé d'approfondir un peu les notions vues précédemment ; il est bien sûr recommandé d'essayer de les faire, mais certains (marqués d'une étoile) sont plus difficiles ou nécessitent d'employer des notions qui ne sont pas présentées dans le cours.

Table des matières

1	Ordinaux, Cardinaux, Axiome du Choix	1
1.1	Bons ordres et ordinaux	2
1.2	Cardinaux et axiome du choix.	10
1.3	Un exemple: le théorème d'Erdős-Rado	19
2	Rappels de topologie	27
2.1	Espaces compacts, complets, séparables...	27
2.2	Topologie produit	29
2.3	Espace de Baire, espace de Cantor	32
3	Espaces polonais	37
3.1	Définition et caractérisation des espaces polonais; lemme de Baire	37
3.2	Ensembles Baire-mesurables	41
4	Groupes polonais	47
4.1	Définition, exemples	47
4.2	Distances invariantes à gauche et groupe complété	50
4.3	Quotients et continuité automatique	53
4.4	Continuité des opérations de groupe.	56
5	Ensembles boréliens, analytiques, coanalytiques	61
5.1	Schémas et théorèmes de transfert	61
5.2	La tribu borélienne	65
5.3	Raffinement de topologies polonaises	67
5.4	Ensembles analytiques; le théorème de séparation	69
5.5	Boréliens standard; fonctions boréliennes	73
6	Actions et relations	77
6.1	Préliminaires	77
6.2	Actions, orbites, stabilisateurs	81

6.3	Bref retour sur les ensembles analytiques et Baire-mesurables.	84
6.4	\mathcal{G}_0 -dichotomie : applications.	86
6.5	\mathcal{G}_0 -dichotomie: preuve.	92
6.5.1	Quelques lemmes.	95
6.5.2	Fin de la preuve.	97
A	Les axiomes de Zermelo-Fraenkel	101
B	Filtres, ultrafiltres, ultraproducts	107

Chapitre 1

Ordinaux, Cardinaux, Axiome du Choix

On va se placer dans le cadre général de la théorie dite de Zermelo-Fraenkel (ZF), dont on ne sortira pas dans ce cours. Il est très vraisemblable qu'il s'agisse du cadre axiomatique que vous avez toujours utilisé, même sans le savoir, pour faire des mathématiques.

Si vous êtes curieux(se), vous êtes invité(e) à consulter l'annexe A pour la liste des axiomes de cette théorie et une discussion rapide de leur signification, et à vous reporter à la bibliographie en fin de chapitre pour des sources plus complètes. Nous n'allons pas rentrer dans des discussions métamathématiques, ou essayer de fournir une introduction complète à la théorie des ensembles (c'est un sujet à part entière, qu'on ne peut pas traiter correctement sans y passer du temps!), mais simplement essayer de fournir une "boîte à outils" de théorie des ensembles, regroupant quelques notions que tout mathématicien devrait connaître. La présentation sera par moments un peu informelle, en particulier lors de l'introduction des ordinaux; il me semble qu'on peut apprendre à manipuler les ordinaux sans savoir les définir précisément.

Commençons par apprendre à compter... Il est facile de compter le nombre d'éléments d'un ensemble fini : on énumère les éléments, et on s'arrête quand il n'y en a plus. On associe ainsi à chaque ensemble fini un entier, qui est son nombre d'éléments. Mais comment faire quand on considère un ensemble infini ? Il n'est pas clair qu'on puisse l'énumérer ; plutôt que de considérer tous les ensembles, on va considérer des ensembles munis d'un ordre permettant une énumération.

1.1 Bons ordres et ordinaux

Définition 1.1. Soit X un ensemble. Un *bon ordre* sur X est une relation d'ordre \leq sur X tel que tout sous-ensemble non vide de X a un plus petit élément. On dit que $S \subseteq X$ est un *segment initial* si

$$\forall x, y \in X \ (y \in S \text{ et } x \leq y) \Rightarrow (x \in S) .$$

Si $x \in X$ on notera S_x le segment initial $\{y \in S : y < x\}$.

L'idée, dans notre optique de comptage, est que pour énumérer un ensemble bien ordonné, on commence au plus petit élément, puis on prend le plus petit des autres, etc. ; mais s'arrête-t-on un jour ?

L'essentiel de la théorie des ensembles bien ordonnés est fondé sur le résultat suivant :

Proposition 1.2. Soit (X, \leq) un ensemble bien ordonné et $f: X \rightarrow X$ une application strictement croissante. Alors pour tout $x \in X$ on a $f(x) \geq x$.

Preuve.

Supposons qu'il existe $x \in X$ tel que $f(x) < x$, et appelons x_0 le plus petit élément ayant cette propriété. Alors on a, pour tout $x < x_0$, $f(x) \geq x$.

Puisque f est strictement croissante, on en déduit que pour tout $x < x_0$ on a $f(x_0) > x$.

Comme l'ordre \leq est total, cela implique en particulier que $f(x_0) \geq x_0$, ce qui contredit la définition de x_0 . \square

Ceci permet d'obtenir un résultat de rigidité des ensembles bien ordonnés.

Proposition 1.3. Soit (X, \leq) un ensemble bien ordonné, $W \subseteq X$ un segment initial et $f: X \rightarrow W$ un isomorphisme. Alors $W = X$ et pour tout $x \in X$ on a $f(x) = x$.

Par conséquent, si deux segments initiaux de X sont isomorphes alors ils sont égaux.

Preuve.

Montrons tout d'abord que $W = X$. Pour cela, prenons $x \in X$. On a $f(x) \in W$, et $f(x) \geq x$ d'après la proposition précédente. Comme W est un segment initial, on en déduit que $W = X$.

Pour conclure, il suffit de remarquer qu'alors f est une bijection, dont l'inverse f^{-1} est un isomorphisme de (X, \leq) sur (X, \leq) . Par conséquent on a $f^{-1}(x) \geq x$ pour tout x , ce qui en composant par f donne $x \geq f(x)$ et donc $f(x) = x$ pour tout $x \in X$. \square

Notation. Si X, X' sont deux ensembles bien ordonnés, on note $X \preceq X'$ si X est isomorphe à un segment initial de X' , et $X \sim X'$ si X et X' sont isomorphes. On utilisera la notation $X \prec X'$ pour signifier que $X \preceq X'$ et $X \not\sim X'$, autrement dit si X est isomorphe à un segment initial strict de X' .

Remarquons que le théorème 1.3 entraîne que $X \sim X'$ si, et seulement si, $X \preceq X'$ et $X' \preceq X$.

On a dit qu'on souhaitait pouvoir énumérer tous les ensembles bien ordonnés ; mais quelle notion de "longueur" utiliser ?

Théorème 1.4. *Soit X, Y deux ensembles bien ordonnés. Alors une et une seule des assertions suivantes est vraie :*

- (a) $X \prec Y$
- (b) $Y \prec X$
- (c) $X \sim Y$

Ce théorème dit qu'une notion de "longueur" possible d'un ensemble bien ordonné est l'ensemble lui-même, où on compare deux longueurs par la relation "être isomorphe à un segment initial". Restera ensuite à choisir un représentant dans chaque classe d'isomorphisme...

Preuve.

Notons \tilde{X} l'ensemble des segments initiaux de X , ordonné par l'inclusion. On vérifie facilement que c'est un ensemble bien ordonné. Si tout $S \in \tilde{X}$ est isomorphe à un segment initial de Y alors c'est en particulier le cas de X , et la preuve est finie. Sinon, appelons S le plus petit élément qui ne soit pas isomorphe à un segment initial de Y .

Soit $x < x' \in S$. Alors $f_y \circ f_x^{-1}(f_x(S_x)) = f_y(S_x)$, et comme $f_y \circ f_x^{-1}$ est un isomorphisme entre deux segments initiaux de Y on en déduit que $f_y \circ f_x^{-1}(y) = y$ pour tout $y \in f_x(S_x) = f_y(S_x)$.

Si jamais il existe $x \in S$ tel que $f(\{x' : x' \leq x\}) = f(S_x) = Y$ alors il n'y a rien à démontrer ; sinon pour tout $x \in S$ il existe une injection croissante $f_x : S_x \rightarrow Y$ d'image un segment initial de Y . Mais alors, comme $S = \bigcup_{x \in S} S_x$, on peut utiliser l'observation précédente pour définir une fonction strictement croissante $f : S \rightarrow Y$ d'image $\bigcup_{x \in S} f_x(S_x)$ (en posant $f(y) = f_x(y)$ dès que $y \in S_x$). L'image de f est une union de segments initiaux de Y , et est donc un segment initial de Y , ce qui contredit le choix de S . \square

Corollaire 1.5. *Soit X, Y deux ensembles bien ordonnés. Alors $X \preceq Y$ si, et seulement si, il existe une injection croissante de X dans Y .*

Théorème 1.6. *Soit $\mathcal{W} = \{W_i : i \in I\}$ une famille d'ensembles bien ordonnés. Alors il existe $W \in \mathcal{W}$ tel que $W \preceq W'$ pour tout $W' \in \mathcal{W}$.*

Preuve.

Soit $W_0 \in \mathcal{W}$. Si $W_0 \preceq W'$ pour tout $W' \in \mathcal{W}$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, l'ensemble $\{x \in W_0 : S_x \text{ est isomorphe à un élément de } \mathcal{W}\}$ est non vide. Appelons w le plus petit élément de cet ensemble, et prenons $W \in \mathcal{W}$ qui soit isomorphe à S_w (vu dans W_0). Pour tout $W' \in \mathcal{W}$, il est impossible par définition que W' soit isomorphe à un segment initial strict de S_w , par conséquent on a $W \preceq W'$ pour tout $W' \in \mathcal{W}$. \square

Maintenant, il faudrait définir rigoureusement les *ordinaux* ; l'idée est qu'on veut compter à partir de 0 jusqu'à l'infini, et au-delà. Mais une définition formelle pose quelques difficultés métamathématiques, qui ne correspondent pas à nos préoccupations dans ce cours. On va donc se contenter d'une présentation intuitive.

L'idée est que les ordinaux doivent permettre de "représenter" les ensembles bien ordonnés, au sens où tout ordinal soit un ensemble bien ordonné et pour tout ensemble bien ordonné il y ait un ordinal unique qui lui soit isomorphe ; c'est cet ordinal-là qui doit représenter la "longueur" d'un ensemble bien ordonné. Admettons que cela soit possible (et pensons donc intuitivement à un ordinal comme à une classe d'isomorphisme d'ensembles bien ordonnés). Allons plus loin et notons que si α est un ordinal, alors tout ordinal plus petit que α est isomorphe à un (unique) segment initial de α ; et les segments initiaux stricts de α s'identifient naturellement aux éléments de α .

On a donc envie d'identifier les ordinaux strictement inférieurs à α aux éléments de α , et donc d'effectuer notre choix de représentants de classes d'isomorphisme de bons ordres de telle façon que chaque ordinal α soit *égal* à l'ensemble des ordinaux strictement inférieurs à α .

Ceci impose une contrainte : si $\beta < \alpha$ on doit en même temps identifier les ordinaux strictement inférieurs à β aux éléments de β , ce qui amène à vouloir que l'ensemble des éléments strictement inférieurs à β (c'est-à-dire β) soit contenu dans α . Finalement, on a donc envie que tout élément d'un ordinal soit en fait *inclus* dans cet ordinal.

On n'est toujours pas tout à fait satisfait : si on a une famille d'ordinaux, alors on voudrait pouvoir "compter strictement plus loin" que tous les ordinaux de cette famille, ce qui imposerait que la réunion de notre famille d'ordinaux soit un ordinal. On rajoute cela dans les conditions qu'on demande aux ordinaux.

Voilà, on sait maintenant quelles propriétés attendre d'un ordinal, et on sait même comment effectuer leur construction : en effet, il n'y a pas d'éle-

ment plus petit que 0, donc 0 doit être l'ensemble vide. De même, $1 = \{0\} = \{\emptyset\}$, pour tout ordinal fini (i.e tout entier naturel!) on doit avoir $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$, etc. On va se contenter d'admettre qu'une telle construction des ordinaux est possible dans le cadre de la théorie axiomatique de Zermelo-Fraenkel, et reprendre le fil de ce cours.

Les relations \prec, \preceq correspondent à des opérations sur les ordinaux notées cette fois $<, \leq$. On notera maintenant ON la collectionⁱ des ordinaux; on utilisera dans la suite (entre autres) les propriétés suivantes des ordinaux :

1. Tout ordinal est un ensemble bien ordonné, et tout ensemble bien ordonné est isomorphe à un ordinal unique. En particulier deux ordinaux isomorphes sont nécessairement égaux; de plus, pour deux ordinaux α, β on a soit $\alpha < \beta$, soit $\alpha = \beta$, soit $\beta < \alpha$.
2. Pour tout ordinal α , on a $\alpha = \{\beta \in ON : \beta < \alpha\}$.
3. La réunion d'un ensemble d'ordinaux est un ordinal.

Justifions maintenant que l'intersection d'un ensemble d'ordinaux est encore un ordinal; en fait on a même vu mieux, avec le théorème 1.6, qui dans le langage des ordinaux devient :

Théorème 1.7. *Tout ensemble non vide d'ordinaux admet un plus petit élément.*

Avant de continuer, introduisons un peu de terminologie.

Définition 1.8. Un ordinal α est *successeur* s'il existe un ordinal β tel que $\beta < \alpha$ et pour tout ordinal γ on ait soit $\gamma \leq \beta$ soit $\alpha \leq \gamma$; sinon on dit que α est un *ordinal limite*.

On notera ω le plus petit ordinal infini, qui est aussi le plus petit ordinal limite. L'existence d'un tel ordinal est un axiome de ZF; par définition un ordinal α est dit *fini* si tout ordinal tel que $0 < \beta \leq \alpha$ est successeur.

● 0 ● 1 ● 2 ● 3 ● 4
 0 1 2 3 4

L'ordinal ω

i. On dit collection parce que ce n'est pas un ensemble, sinon sa réunion serait un ordinal plus grand que tous les ordinaux, or tout ordinal a un successeur, ce qui fait un point commun entre les ordinaux et les hommes politiques (j'espère).

Notons que tout ordinal a un successeur, c'est-à-dire que pour tout ordinal α il existe un plus petit ordinal β qui soit strictement supérieur à α . On note cet ordinal $s(\alpha)$, et on a formellement $s(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Exercice 1.9. Montrer qu'un ordinal β est limite si, et seulement si, $\beta = \sup\{\eta: \eta < \beta\}$.

Vous êtes habitué(e)s à utiliser des démonstrations par récurrence pour montrer, par exemple, que tous les entiers satisfont une certaine propriété; le principe de la démonstration par récurrence est de dire : si une propriété (P) est telle que pour tout entier naturel n

$$(\forall k < n P(k)) \Rightarrow P(n)$$

alors P est vraie pour tout n (notons que l'hypothèse ci-dessus implique en particulier que $P(0)$ est vraie!). Ce principe s'applique dans tout ensemble bien ordonné (à vous d'en faire une démonstration, ce qui ne devrait pas être trop difficile) et on obtient le résultat suivant :

Théorème 1.10. (*Démonstration par récurrence transfinie*)
Soit P une propriétéⁱⁱ des ordinaux telle que pour tout ordinal α on ait

$$(\forall \beta < \alpha P(\beta)) \Rightarrow P(\alpha) .$$

Alors $P(\alpha)$ est vraie pour tout α .

On sait maintenant, au moins en théorie, comment démontrer des énoncés par récurrence transfinie; il est aussi courant en analyse et en combinatoire infinie qu'on soit amené à *construire* un objet par récurrence transfinie; c'est une construction facile à comprendre mais à l'énoncé assez aride.

Théorème 1.11. Soit (X, \leq) un ensemble bien ordonné, Y un ensemble, et \mathcal{F} l'ensemble de toutes les fonctions dont le domaine est un segment initial de X et dont l'image est contenue dans Y . Pour toute fonction $G: \mathcal{F} \rightarrow Y$, il existe une unique fonction $f: X \rightarrow Y$ telle que l'on ait, pour tout $x \in X$,

$$f(x) = G(f|_{s_x}) .$$

ii. Là encore la notion de propriété est floue; disons simplement qu'une propriété est quelque chose qu'on peut exprimer par un énoncé écrit en utilisant le langage de la théorie des ensembles.

On n'utilise jamais cet énoncé sous cette forme très abstraite ; mais on utilise fréquemment ce principe pour construire des objets. L'idée est que construire un objet par récurrence transfinie (en ξ étapes, pour ξ un certain ordinal), c'est dire ce qu'on fait au rang 0, puis donner une procédure pour passer de l'étape α à l'étape $\alpha + 1$, et enfin donner une procédure pour passer aux ordinaux limites, jusqu'à ce qu'on atteigne ξ . C'est le "cas limite" qui est nouveau par rapport au schéma de récurrence classique.

Plutôt que de donner une preuve du théorème de construction par récurrence transfinie, donnons un exemple.

Exemple : la dérivation de Hausdorff.

Soit (X, \leq) un ensemble ordonné, et \sim une relation d'équivalence compatible avec \leq (c'est-à-dire, telle que \leq passe au quotient par \sim). Alors on peut définir une nouvelle relation, notée $D(\sim)$, en posant

$$xD(\sim)y \Leftrightarrow (\text{il existe un nombre fini de } \sim\text{-classes entre } x \text{ et } y) .$$

Cette relation est à nouveau une relation d'équivalence, qui étend \sim et est compatible avec \leq .

Soit maintenant ξ un ordinal quelconque. Pour $\alpha < \xi$, on définit une relation d'équivalence \sim_α compatible avec \leq par récurrence transfinie, en respectant les trois points suivants :

- (a) $(x \sim_0 y) \Leftrightarrow (x = y)$
- (b) Si α est le successeur de β , alors $\sim_\alpha = D(\sim_\beta)$.
- (c) Si $\alpha = \sup(\{\beta : \beta < \alpha\})$ alors $\sim_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \sim_\beta$.

Intuitivement, on a "épluché X ξ fois" : on a commencé par identifier tous les points tels que $[x, y]$ est fini et formé ainsi un nouvel ensemble ordonné, auquel on a appliqué la même construction, et on a répété le procédé pendant ξ étapes.

Par exemple, si on applique cette construction à \mathbb{N} muni de son ordre usuel, on a $\sim_1 = X \times X$; par contre, si on l'applique à \mathbb{Q} muni de son ordre usuel, on a $\sim_1 = \sim_0$ et donc $\sim_\alpha = \sim_0$ pour tout ordinal α .

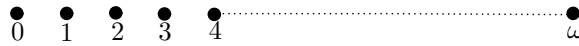
On est amené à se poser un certain nombre de questions : est-ce qu'on peut continuer à éplucher X indéfiniment sans jamais s'arrêter ? Au contraire, est-ce que X est "épluchable", autrement dit ne reste-il plus rien au bout d'un nombre assez grand d'étapes ? Ou tombe-t-on sur un noyau, c'est-à-dire est-ce que \sim_n arrête de grossir au bout d'un moment ? Nous reviendrons sur ces questions après l'introduction des cardinaux.

On pourrait définir les opérations ordinales en décrivant des opérations sur les bons ordres ; pour gagner du temps dans ces notes, on va simplement

énoncer une définition par récurrence transfinie. Rappelons qu'on note $s(\beta)$ le successeur d'un ordinal β , c'est-à-dire le plus petit ordinal strictement plus grand que β .

Définition 1.12. (addition ordinale) Soit α un ordinal. On pose $\alpha + 0 = \alpha$, puis on définit par récurrence transfinie sur $\beta \in ON$ l'addition ordinale $\alpha + \beta$ en posant :

$$\alpha + \beta = \begin{cases} s(\alpha + \gamma) & \text{si } \beta = s(\gamma) \\ \sup(\{\alpha + \xi : \xi < \beta\}) & \text{si } \beta \text{ est limite} \end{cases}$$



L'ordinal $\omega + 1$

Par exemple, on a $1 + \omega = \sup\{1 + n : n < \omega\} = \omega$.

Par contre, $\omega + 1 \neq \omega$ puisque $\omega + 1$ a un plus grand élément ; l'addition ordiale n'est donc *pas* commutative. Intuitivement, l'addition de deux ordinaux correspond à mettre "bout à bout" α et β ; l'ordre dans lequel on "recolle" les deux ordinaux est important !

Exemple. Utilisons une démonstration par récurrence transfinie pour montrer que l'addition est associative, et que si $\alpha \neq \beta$ alors pour tout δ on a $\delta + \alpha \neq \delta + \beta$.

On veut commencer par montrer que, étant donnés trois ordinaux α, β, γ on a $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

Raisonnons par récurrence sur γ ; autrement dit, on va essayer de démontrer que pour tout ordinal γ la propriété $P(\gamma)$ définie par "Pour tous les ordinaux α, β on a $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ " est vraie.

Notons qu'il n'y a rien à montrer si $\gamma = 0$; ensuite supposons que γ est tel que $P(\eta)$ est vrai pour tout $\eta < \gamma$. Si γ est le successeur d'un certain δ , alors on a pour toute paire d'ordinaux (α, β) (en utilisant la définition de l'addition ordiale et notre hypothèse de récurrence) :

$$(\alpha + \beta) + \gamma = s((\alpha + \beta) + \delta) = s(\alpha + (\beta + \delta)) = \alpha + s(\beta + \delta) = \alpha + (\beta + \gamma)$$

On voit donc que $P(\gamma)$ est vraie ; reste à traiter le cas où γ est un ordinal limite. Dans ce cas on a (toujours en utilisant la définition de l'addition, notre hypothèse de récurrence, et le fait que $\beta + \gamma$ est limite si γ l'est, ce qui est une conséquence directe de la définition de l'addition ordiale) :

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) + \gamma &= \sup\{(\alpha + \beta) + \eta : \eta < \gamma\} = \sup\{\alpha + (\beta + \eta) : \eta < \gamma\} \\ &= \alpha + \sup\{\beta + \eta : \eta < \gamma\} = \alpha + (\beta + \gamma) . \end{aligned}$$

On voit donc que $P(\gamma)$ est vraie, et on a fini de prouver que l'addition ordinale est associative ; ici le lecteur attentif devrait se rendre compte que, même s'il n'y a pas de difficulté particulière dans le raisonnement, il faut apporter un certain soin à la rédaction pour qu'elle soit correcte ; par conséquent il faut s'entraîner à écrire ce type de démonstration !

Venons-en à la deuxième propriété ci-dessus ; fixons δ et α et essayons de montrer que pour tout $\beta > \alpha$ on a $\delta + \alpha < \delta + \beta$. Raisonnons par récurrence sur β ; si $\beta = s(\alpha)$ alors notre propriété est vraie puisque pour tout ordinal γ on a $s(\gamma) > \gamma$. Maintenant si $\beta > s(\alpha)$ est tel que notre propriété est vraie pour tout $\eta < \beta$, alors :

- Si $\beta = s(\eta)$ on a $\delta + \beta = \delta + s(\eta) = s(\delta + \eta) > \delta + \eta > \delta + \alpha$.
- Si β est limite alors on a $\delta + \beta = \sup\{\delta + \eta : \eta < \beta\} > \delta + s(\alpha) > \delta + \alpha$.

Ceci achève la démonstration ; notons pour rassurer le lecteur que la rédaction ci-dessus est particulièrement lourde et détaillée, et que par la suite on évitera de trop rentrer dans le détail de raisonnements élémentaires comme celui-ci. Mais il faut bien vérifier qu'un raisonnement d'apparence élémentaire ne comporte pas de difficulté cachée, et c'est ce que nous avons fait ci-dessus. \square

Dans la suite on utilisera toujours la notation $\alpha+1$ pour désigner le successeur d'un ordinal α . Répétons une dernière fois que $\alpha+1$ est simplement l'ordinal obtenu en rajoutant à α un élément qui majore tous les éléments de α ; dans le monde un peu étrange des ordinaux, cela signifie que $\alpha+1 = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Définition 1.13. (multiplication ordinale) Soit α un ordinal. On pose $\alpha \cdot 0 = 0$, puis on définit par récurrence transfinie sur $\beta \in ON$ la multiplication ordinale $\alpha \cdot \beta$ en posant :

$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} (\alpha \cdot \gamma) + \alpha & \text{si } \beta = \gamma + 1 \\ \sup(\{\alpha \cdot \xi : \xi < \beta\}) & \text{si } \beta \text{ est limite} \end{cases}$$

Cette fois on a $2 \cdot \omega = \omega$; l'idée de la multiplication ordinale est que "faire le produit de α par β , c'est mettre bout à bout β copies de α ". Le dessin suivant essaie de justifier graphiquement l'égalité $2 \cdot \omega = \omega$.



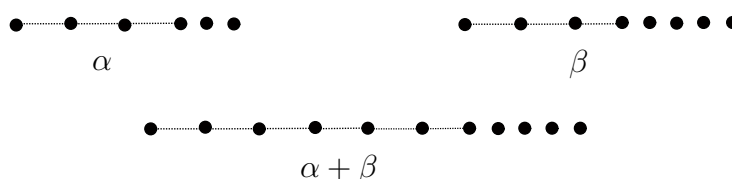
$$2 \cdot \omega = \omega$$

Exercice 1.14. Utiliser une démonstration par récurrence transfinie pour montrer que la multiplication est associative, et que si $\alpha > 0$ alors pour tout $\gamma > 1$ on a $\alpha < \alpha \cdot \gamma$. Pourver aussi que $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

Les deux opérations définies ci-dessus sont associatives, on a bien comme attendu $\alpha + \alpha = \alpha.2$, par contre attention encore à la non-commutativité : on a vu que $1 + \omega = \omega$ tandis que $\omega + 1 \neq \omega$ puisque $\omega + 1$ est successeur ; de même $2.\omega = \omega$ tandis que $\omega.2 = \omega + \omega > \omega$.

Exercice 1.15.

Décrire des opérations sur les bons ordres qui donnent naissance à l'addition et à la multiplication des ordinaux (pour la somme ordinale, on pourra s'inspirer du dessin ci-dessous).



La somme de deux ordinaux

On n'utilisera pratiquement pas dans la suite d'arithmétique des ordinaux ; un exercice pour s'entraîner à la récurrence transfinie :

Exercice 1.16. Montrer que tout ordinal α peut s'écrire de façon unique sous la forme $\alpha = \beta + n$, où β est un ordinal limite et n est fini.

1.2 Cardinaux et axiome du choix.

On a vu comment énumérer des ensembles bien ordonnés ; par contre, contrairement aux ensembles finis, un ensemble peut admettre des bons ordres non isomorphes : c'est par exemple le cas de \mathbb{N} .

Cela n'empêche pas d'associer à un ensemble bien ordonné un certain nombre ordinal uniquement déterminé : le plus petit ordinal α tel qu'il existe un bon ordre $<$ sur X avec $(X, <)$ isomorphe à α . Cela permettrait de développer une théorie satisfaisante des cardinaux des ensembles bien ordonnés ; mais comment faire si on a sous la main un ensemble X qui ne nous est pas fourni avec une structure de bon ordre ? La solution fournie par l'axiome de Zermelo est de dire : autorisons-nous à munir tout ensemble d'un bon ordre. Dans ce cas, on saura définir le cardinal d'un ensemble en utilisant des ordinaux, comme expliqué ci-dessus.

A première vue, l'axiome de Zermelo peut paraître excessif ; essayons de nous en passer. On peut définir le fait que X et Y ont "le même nombre d'éléments" sans utiliser de bon ordre, comme le montre la définition suivante.

Définition 1.17. On dit que X a un cardinal inférieur à Y , et on note $|X| \leq |Y|$, s'il existe une injection de X dans Y , et on dit que X et Y ont même cardinal, ou sont équipotents (noté $|X| = |Y|$), s'il existe une bijection de X sur Y .

Ainsi, on cherche à étendre les notions intuitives de comptage, qui marchent pour les ensembles finis, à tous les ensembles. Déjà, il faut s'assurer que ces notions sont bien compatibles entre elles ; au début, tout se passe bien.

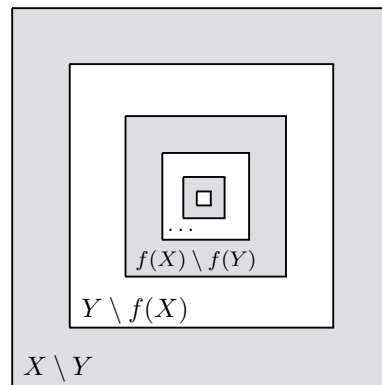
Théorème 1.18. (Schröder-Bernstein)
Si $|X| \leq |Y|$ et $|Y| \leq |X|$ alors $|Y| = |X|$.

Preuve.

Soit X, Y deux ensembles et $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$ deux injections. Bien sûr, on a $X \supseteq g(Y) \supseteq g(f(X))$, et $g \circ f$ est une injection de X dans X .

On voit donc qu'il suffit de prouver que, si X est un ensemble, $f: X \rightarrow X$ une injection et $Y \subseteq X$ est tel que $f(X) \subseteq Y \subseteq X$ alors il existe une bijection de X sur Y .

En réfléchissant à ce cas, on est amené à considérer le dessin suivant :



On voit apparaître des "couronnes" : $X \setminus Y, Y \setminus f(X), f(X) \setminus f(Y)$, etc.

Les couronnes "d'ordre impair" (en blanc sur le dessin) sont toutes contenues dans Y ; tandis que seule la première couronne d'ordre pair n'est pas contenue dans Y , et f envoie chaque couronne d'ordre pair sur la couronne suivante. Pour construire la bijection recherchée, on n'a donc qu'à laisser tous les points blancs fixes, et décaler les points gris d'une couronne en utilisant f .

Formellement, on définit une suite d'ensembles disjoints $X_i \subseteq X$ en posant $X_i = f^i(X \setminus Y)$ ($= f^i(X) \setminus f^i(Y)$) ; puis on définit une fonction $g: X \rightarrow Y$ en posant

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \bigcup X_i \\ x & \text{sinon} \end{cases}$$

Par définition il est clair que g est une injection dont l'image est contenue dans Y , d'autre part il est facile de vérifier, en utilisant le fait que $g(X_i) = f(X_i) = X_{i+1}$ pour tout i , que $g(X) = Y$. \square

Autrement dit, s'il existe une injection de X dans Y et une injection de Y dans X alors il existe une bijection de X sur Y . De plus, s'il existe une injection de X dans Y alors il existe une surjection de Y sur X ⁱⁱⁱ, donc toutes nos définitions possibles pour comparer les cardinaux d'ensembles s'entendent bien, et on obtient ainsi un quasi-ordre sur les ensembles. Notre préoccupation maintenant est de savoir si deux ensembles sont nécessairement comparables pour ce quasi-ordre.

On peut déjà subodorer un problème : si X, Y sont deux ensembles, Y est bien ordonnable et $|X| \leq |Y|$, alors il existe une injection de X dans Y , qu'on peut utiliser pour munir X d'un bon ordre. Autrement dit, si les cardinalités de deux ensembles sont toujours comparables, et s'il existe un ensemble X qui ne peut pas être muni d'un bon ordre, alors on doit avoir $|X| > |Y|$ pour tout ensemble bien ordonnable, et en particulier pour tout ordinal. Donc tout ordinal s'injecte dans X ; mais alors on pourrait utiliser les axiomes de la théorie des ensembles pour prouver que les ordinaux forment un ensemble, et on sait que cela n'est pas possible. Par conséquent, avec nos méthodes, on aura besoin de l'axiome de Zermelo pour avoir une notion satisfaisante de cardinal d'un ensemble.

Exercice 1.19. Montrer (sans utiliser l'axiome de Zermelo) que pour tout ensemble X il existe un plus petit ordinal non équipotent à une partie de X .

Les discussions ci-dessus servaient de prologue à la définition suivante.

Définition 1.20. Soit α un ordinal. On dit que α est un *cardinal* si aucun ordinal strictement inférieur à α n'est équipotent à α .

Il est alors immédiat que tout ensemble bien ordonnable X est équipotent à un unique cardinal noté $|X|$ et que de plus si α est un ordinal alors $|\alpha| \leq \alpha$. Par exemple, tous les ordinaux finis sont des cardinaux, ainsi que ω ; par contre, $\omega + 1$ n'est pas un cardinal. Notons également que par définition deux cardinaux distincts ne peuvent pas être équipotents.

Il existe pour tout κ des ordinaux qui ne sont pas équipotents à une partie de κ , et donc des cardinaux λ tels que $\kappa < \lambda$. On note κ^+ le plus petit tel cardinal.

iii. Exercice!

Exercice 1.21. Montrer que l'ordinal de l'exercice 1.19 est en fait un cardinal, appelé *cardinal de Hartogs* de X .

Définition 1.22. (*Alephs*)

On définit par récurrence transfinie \aleph_α , pour tout ordinal α , en posant $\aleph_0 = \omega$ puis

$$\aleph_\alpha = \begin{cases} \aleph_\beta^+ & \text{si } \alpha = \beta + 1 \\ \bigcup_{\beta < \alpha} \aleph_\beta & \text{si } \alpha \text{ est limite} \end{cases}$$

Il est alors possible de vérifier assez facilement que tous les \aleph_α sont des cardinaux, et réciproquement que tout cardinal est égal à \aleph_α pour un certain α . De plus $\alpha \leq \aleph_\alpha$ pour tout ordinal α (et il est possible que l'inégalité précédente soit une égalité!).

Pour définir une notion satisfaisante du cardinal d'un ensemble, on a eu besoin d'utiliser l'axiome de Zermelo. Celui-ci réapparaît quand on essaie de traiter l'arithmétique des cardinaux, mais sous une forme différente. Il paraît donc raisonnable de faire une pause dans notre exposition et de nous arrêter sur cet axiome, connu généralement sous le nom d'*axiome du choix*. Son énoncé intuitif, dans sa version la plus connue, est : "si on me donne une famille d'ensembles non vides, alors je peux choisir simultanément un élément dans chaque ensemble de cette famille".

Avant de citer trois énoncés équivalents de l'axiome du choix, rappelons qu'un ensemble ordonné $((X, \leq))$ est *inductif* si tout sous-ensemble totalement ordonné admet un majorant. Nous dirons aussi qu'un ensemble X admet une *fonction de choix* s'il existe une fonction $f: \mathcal{P}(X) \rightarrow X$ telle que pour toute partie $A \subseteq X$ non vide on ait $f(A) \in A$.

Définition 1.23. On introduit les énoncés suivants :

1. (Axiome du choix) Tout ensemble X admet une fonction de choix.
2. (Axiome de Zorn) Tout ensemble ordonné inductif non vide a au moins un élément maximal.
3. (Axiome de Zermelo) Tout ensemble peut être bien ordonné.

Ces trois énoncés sont équivalents. Le premier d'entre eux est l'énoncé "historique" de l'axiome du choix; sous cette forme il a été introduit par Zermelo en 1904. Cet axiome était implicitement utilisé par de nombreux mathématiciens du dix-neuvième siècle et paraît plutôt "naturel". Il est plus difficile de se faire une idée intuitive du second énoncé, dont on voit qu'il permet d'une certaine façon de faire de l'analyse en évitant la théorie des ordinaux et la récurrence transfinie. Le dernier énoncé paraît, lui, assez arbitraire, et dit qu'en fait on peut ramener les raisonnements de théorie des ensembles à

des raisonnements sur les ordinaux. Un résumé fameux, mais apocryphe^{iv} : "il est clair que l'axiome du choix est vrai et que l'axiome de Zermelo est faux ; quant au théorème de Zorn, qui sait ?"

Preuve que les trois énoncés ci-dessus sont équivalents.

Toutes les implications entre les axiomes ci-dessus sont instructives à démontrer, et c'est un exercice vivement recommandé ; ici on va se contenter d'expliquer rapidement pourquoi (Zermelo) implique (Choix), (Choix) implique (Zorn) et (Zorn) implique (Zermelo).

(Zermelo) \Rightarrow (Choix) :

C'est l'implication la plus facile des trois : en effet, si (X, \leq) est bien ordonné alors on peut obtenir une fonction de choix sur $\mathcal{P}(X)$ en posant simplement $f(A) = \min(A)$.

(Choix) \Rightarrow (Zorn) :

Soit (X, \leq) un ensemble ordonné inductif, dont on suppose qu'il n'a pas d'élément maximal. Fixons une fonction de choix φ sur X ; pour tout ensemble totalement ordonné $M \subset X$ il doit exister un majorant strict de M , autrement dit l'ensemble des majorants stricts de M est non vide. En appliquant φ à cet ensemble, on obtient une fonction ψ qui associe à tout sous-ensemble totalement ordonné M de X un majorant strict $\psi(M)$ de M^\vee .

Soit maintenant κ un ordinal non équipotent à une partie de X . Soit $x \in X$; par récurrence transfinie, on peut construire une suite indexée par κ d'éléments de X en posant, pour tout $\alpha < \kappa$:

- (a) $x_0 = x$;
- (b) $x_{\alpha+1} = \varphi(\{y \in X : y > x_\alpha\})$;
- (c) $x_\alpha = \psi(\{x_\beta : \beta < \alpha\})$ si $\alpha = \sup\{\beta : \beta < \alpha\}$

La suite qu'on vient de construire nous donne une injection de κ dans X , ce qui est impossible par définition de κ .

(Zorn) \Rightarrow (Zermelo) :

Introduisons l'ensemble

$$\mathcal{A} = \{(A, \leq) : A \subseteq X \text{ et } (A, \leq) \text{ est bien ordonné}\}$$

On peut munir \mathcal{A} d'une structure d'ordre en posant $(A, \leq_A) \preceq (B, \leq_B)$ si, et seulement si, $A \subseteq B$ et \leq_B étend \leq_A .

Alors on peut vérifier que $(\mathcal{P}(X), \preceq)$ est un ensemble ordonné inductif non vide, qui a par conséquent un élément maximal (A, \leq) . Reste à remarquer

iv. Wikipedia l'attribue à un certain Jerry Bona.

v. Merci François pour avoir repéré mon erreur ici...

que la maximalité de (A, \leq) a pour conséquence que $A = X$. \square

L'axiome du choix a de nombreuses conséquences en mathématiques, dont certaines paraissent pathologiques. L'exemple le plus connu est sans doute l'existence de parties non Lebesgue-mesurables dans \mathbb{R} . Certains mathématiciens refusent de ce fait l'axiome du choix ; notons tout de même que, contrairement à une idée reçue, celui-ci n'est *pas* équivalent à l'existence de parties non Lebesgue-mesurables ; autrement dit, supposer que toute partie de \mathbb{R} est Lebesgue-mesurable est plus fort que supposer que l'axiome du choix est faux. Il en va de même du paradoxe de Banach-Tarski : c'est une conséquence de l'axiome du choix qui ne lui est pas équivalente.

Par ailleurs, l'axiome du choix a de nombreuses conséquences qui, elles, paraissent très utiles : théorème de la base incomplète ou lemme de Krull pour les algébristes, théorème de Tychonov pour les analystes... Et bien sûr on a vu que la théorie des ensembles devient très vite très compliquée^{vi} si on n'a pas l'axiome du choix, puisqu'il est déjà difficile de compter le nombre d'éléments d'un ensemble quelconque. Un autre exemple de difficulté liée à l'absence de l'axiome du choix se trouve dans l'exercice suivant.

Exercice 1.24. Montrer que l'axiome du choix est équivalent à l'énoncé suivant : si X, Y sont deux ensembles et $f: X \rightarrow Y$ est une surjection, alors il existe $g: Y \rightarrow X$ telle que $f(g(y)) = y$ pour tout $y \in Y$.

Dans la suite de ces notes, on utilisera sans vergogne l'axiome du choix sous ses différentes formes. En fait, comme on ne considérera jamais d'ensembles de très grand cardinal, on pourrait être tenté de se contenter de l'*axiome du choix dénombrable*. Cet axiome, qui dit qu'un produit dénombrable d'ensembles non vides est non vide (ou, de manière équivalente, qu'on peut choisir de manière simultanée un point dans chaque élément d'une famille *dénombrable* d'ensembles non vides), est fondamental pour le développement de l'analyse. Par exemple, montrer que les deux définitions classiques de la continuité pour des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} (par les suites/image inverse d'un fermé est fermé) sont équivalentes requiert l'axiome du choix dénombrable... De même on a besoin d'une forme d'axiome du choix pour justifier qu'une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable, comme le montre l'exercice suivant.

Exercice 1.25. Montrer que l'axiome du choix dénombrable entraîne que toute réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable (rappelez qu'un ensemble est dénombrable s'il est fini ou équipotent à ω).

vi. Ce qui n'est pas forcément une mauvaise chose !

Montrer que si toute réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable alors tout produit dénombrable de parties dénombrables non vides est non vide.

En réalité, l'axiome du choix dénombrable n'est pas suffisant pour les raisonnements que nous devons effectuer dans ce cours.

En effet, on aura besoin de construire des suites en utilisant le principe suivant : supposons qu'étant donnés x_1, \dots, x_n tel que $P(\{x_1, \dots, x_n\})$ est satisfaite (où P est une certaine propriété des ensembles finis) j'arrive à trouver un x tel que $\{x_1, \dots, x_n, x\}$ a la propriété P ; alors je suis capable de construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que pour tout n on ait $P(\{x_1, \dots, x_n\})$.

Ce procédé est à la base de toutes les constructions par "approximation successives" et devient légal quand on s'autorise à appliquer l'*axiome des choix dépendants*.

Définition 1.26. L'*axiome des choix dépendants* est l'énoncé suivant :

Soit X un ensemble et R une relation binaire sur X telle que pour tout $a \in X$ il existe $b \in X$ satisfaisant aRb . Alors il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X tels que $x_n R x_{n+1}$ pour tout n .

Pour nous, l'axiome des choix dépendants sera particulièrement important, puisqu'il se trouve en fait être équivalent (au dessus de ZF) à l'énoncé "le théorème de Baire est vrai dans tout espace complet", et le théorème de Baire (dont l'énoncé sera rappelé plus loin dans ce cours) est d'une certaine façon la pierre angulaire de la théorie descriptive des ensembles.

Notons que l'axiome du choix implique l'axiome des choix dépendants, qui implique à son tour l'axiome du choix dénombrable ; on peut montrer qu'aucune des implications réciproques n'est vraie. Enfin, remarquons que l'axiome des choix dépendants, s'il est suffisant pour développer l'analyse classique, ne permet pas de démontrer l'existence d'ensembles non Lebesgue-mesurables ; on peut considérer que cet axiome est accepté par une grande majorité des mathématiciens contemporains.

En fait, il semble qu'un consensus soit en train d'apparaître chez les théoriciens des ensembles pour penser qu'un bon cadre axiomatique serait d'accepter l'axiome des choix dépendants et l'*axiome de détermination*, qui contredit fortement l'axiome du choix (mais pas l'axiome des choix dépendants, bien sûr). Les raisons qui motivent ce point de vue dépassent le cadre de ce cours, et pour simplifier l'exposition on utilisera l'axiome du choix "classique".

Revenons à nos cardinaux ; à l'aide de l'axiome du choix, on peut vérifier que

si $(X_\alpha)_{\alpha < \lambda}$ et $(Y_\alpha)_{\alpha < \lambda}$ sont tels que $|X_\alpha| = |Y_\alpha|$ pour tout $\alpha < \lambda$ alors on a

$$\left| \bigsqcup_{\alpha < \lambda} X_\alpha \right| = \left| \bigsqcup_{\alpha < \lambda} Y_\alpha \right| \quad \text{et} \quad \left| \prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha \right| = \left| \prod_{\alpha < \lambda} Y_\alpha \right| .$$

(Rappelons que la notation \sqcup désigne une union disjointe)

De même si $|X| = |X_1|$ et $|Y| = |Y_1|$ alors $|X^Y| = |X_1^{Y_1}|$. On peut alors définir les opérations arithmétiques cardinales :

Définition 1.27. (arithmétique cardinale) Soit λ un ordinal et $(\kappa_\alpha)_{\alpha < \lambda}$ une suite de cardinaux indexée par λ . On définit $\sum_{\alpha < \lambda} \kappa_\alpha$ comme l'unique cardinal équipotent à $\bigsqcup \kappa_\alpha$.

De même, $\prod_{\alpha < \lambda} \kappa_\alpha$ est l'unique cardinal équipotent au produit cartésien des κ_α .

Enfin, si κ et λ sont deux cardinaux on définit κ^λ comme l'unique cardinal équipotent à l'ensemble des fonctions de λ dans κ ; en particulier $|2^X| = |\mathcal{P}(X)|$ pour tout ensemble X .

La somme et le produit de cardinaux sont des opérations commutatives et associatives; attention au fait que la somme/produit de deux cardinaux diffère selon qu'on les considère comme des cardinaux ou comme des ordinaux...

Exercice 1.28. Montrer que $|\mathbb{Q}^2| = \aleph_0$, puis montrer que $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$. Pour la dernière question, on pourra considérer l'application $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Q}^2)$ définie par

$$f(x) = \{(q, q') \in \mathbb{Q}^2 : q < x < q'\} .$$

L'addition et la multiplication d'un nombre fini de cardinaux sont simples à comprendre, comme le montre le théorème suivant.

Théorème 1.29.

Soit κ, λ deux cardinaux infinis. Alors on a $\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max(\kappa, \lambda)$

Preuve.

Il suffit de montrer que pour tout cardinal infini κ on a $\kappa \cdot \kappa = \kappa$, autrement dit il nous faut montrer que tout ensemble infini X est équipotent à $X \times X$ ^{vii}
On raisonne par récurrence transfinie : soit donc κ un cardinal infini, dont on suppose que pour tout cardinal infini $\lambda < \kappa$ on a $\lambda \cdot \lambda = \lambda$.

On va munir $\kappa \times \kappa$ d'un bon ordre dont tous les segments initiaux stricts se plongent dans κ . Ce bon ordre sera isomorphe à un certain ordinal, qui est

vii. voilà encore un énoncé équivalent à l'axiome du choix!

alors plus petit que κ (un ordinal est la réunion de ses segments initiaux), et permettra de définir une injection de $\kappa \times \kappa$ dans κ .

Pour définir notre bon ordre, on pense à l'énumération classique de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, et on pose, pour $(\alpha, \beta), (\alpha', \beta') \in \kappa^2$:

$$((\alpha, \beta) \preceq (\alpha', \beta')) \Leftrightarrow ((\alpha + \beta < \alpha' + \beta') \text{ ou } (\alpha + \beta = \alpha' + \beta' \text{ et } \alpha \leq \alpha'))$$

On vérifie que ceci définit bien un bon ordre sur κ^2 ; de plus, si $(\alpha, \beta) \in \kappa^2$ alors le \preceq -segment initial associé à (α, β) se plonge dans $(\alpha + \beta) \times (\alpha + \beta)$. Par notre hypothèse de récurrence, et puisque α, β sont de cardinal $< \kappa$, on obtient que $|\alpha + \beta|$ est soit fini soit infini strictement inférieur à κ ; par conséquent, $|(\alpha \times \beta) \times (\alpha \times \beta)| < \kappa$.

On voit donc que tous les segments initiaux du bon ordre \preceq sur $\kappa \times \kappa$ sont de cardinal strictement inférieur à κ , ce qui termine la preuve. \square

Exercice 1.30. Montrer que pour trois cardinaux κ, λ, μ on a $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$.

Exercice 1.31. Montrer que pour tout cardinal infini κ on a $2^\kappa = \kappa^\kappa$.

Soit $\kappa \leq \lambda$ deux cardinaux avec λ infini. En utilisant le fait que $\kappa \cdot \lambda = \lambda$, montrer que l'ensemble $\{A \subseteq \lambda : |A| = \kappa\}$ est de cardinal λ^κ .

D'une certaine façon, l'opération arithmétique la plus mystérieuse sur les cardinaux est l'exponentiation.

Théorème 1.32. (Cantor) *Pour tout ensemble X il n'existe pas de surjection $f : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$.*

Avec nos notations cela signifie que pour tout cardinal κ on a $\kappa < 2^\kappa$.

Preuve.

Par l'absurde, soit $f : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ une surjection, et soit

$$Y = \{x \in X : x \notin f(x)\} .$$

On doit avoir $Y = f(x_0)$ pour un certain $x_0 \in X$, mais alors on vérifie que $(x_0 \in Y) \Leftrightarrow (x_0 \notin Y)$, et on arrive donc à une contradiction. \square

On sait donc produire une classe strictement croissante et non bornée de cardinaux, en répétant l'opération $\kappa \mapsto 2^\kappa$. Y a-t-il des cardinaux qui ne sont pas de cette forme ?

Définition 1.33. *L'hypothèse du continu (HC) est l'énoncé $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.*

L'hypothèse du continu généralisée est l'énoncé affirmant que pour tout ordinal α on a $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

L'idée sous-jacente de l'hypothèse du continu est qu'on peut "voir" \mathbb{N} , de cardinal \aleph_0 , et \mathbb{R} , de cardinal 2^{\aleph_0} , mais on ne voit pas d'ensemble de réels qui soit de cardinal intermédiaire. La question est donc : en existe-t-il ?

Pendant longtemps cette hypothèse a paru naturelle ; Gödel a prouvé qu'elle était consistante avec les axiomes de ZFC. Mais dans les années 60, Paul Cohen a montré, en utilisant la méthode du *forcing*, que la négation de l'hypothèse du continu était *aussi* consistante avec ZFC, autrement dit (HC) est indépendante de ZFC.

Aujourd'hui, la plupart des théoriciens des ensembles considèrent qu'il n'y a aucune raison de limiter la richesse de la théorie en imposant arbitrairement que l'hypothèse du continu soit vérifiée ; il existe des axiomes ("grands cardinaux") menant à une théorie très riche dans laquelle l'hypothèse du continu est fausse.

On n'en dira pas plus sur l'hypothèse du continu dans ce cours ; on n'aura pas non plus besoin de notions supplémentaires d'arithmétique cardinale. Notons cependant que dans le cadre de ZFC peu de théorèmes "simples" peuvent être établis, car beaucoup d'énoncés sur les cardinaux se trouvent être indépendants de ZFC. Heureusement, nous n'allons pas manipuler des ensembles quelconques, mais des ensembles munis d'une topologie "sympathique", dont nous ne manipulerons que des sous-ensembles "définissables".

1.3 Un exemple : le théorème d'Erdős-Rado

Avant d'en finir avec ce chapitre d'introduction à la théorie des ensembles, on va fournir un exemple de démonstration utilisant les notions que nous avons introduites. Le théorème qu'on va démontrer n'est pas choisi complètement au hasard : il peut, entre autres, être utile en théorie des modèles. Il ne sera par contre utilisé nulle part dans ce cours.

Introduisons un peu de terminologie : si X est un ensemble et κ un cardinal alors on désigne par $[X]^\kappa$ l'ensemble des parties de X qui sont de cardinal κ .

Si κ, μ sont des cardinaux, une fonction $f: [X]^\kappa \rightarrow \mu$ est appelée *coloriage* de $[X]^\kappa$ avec μ couleurs. La question, étant donné un coloriage, est : existe-il de grands ensembles *monochromatiques* $Y \subseteq X$, i.e tels que f soit constante sur $[Y]^\kappa$?

Définition 1.34. Soit $\kappa, \eta, \lambda, \mu$ des cardinaux. On notera $\kappa \rightarrow (\eta)_\lambda^\mu$ pour signifier la chose suivante : dès que X est un ensemble de cardinal $\geq \kappa$, et f est un coloriage de $[X]^\mu$ à λ couleurs, il existe un sous-ensemble $Y \subseteq X$ monochromatique et de cardinal η .

A première vue, cette définition peut paraître ésotérique. Notons cependant que, par exemple, le principe des tiroirs dit simplement que $\aleph_0 \rightarrow (\aleph_0)_n^1$ est vrai pour tout entier naturel n .

De même, le théorème de Ramsey (qui a donné naissance à la théorie dont on est ici en train d'exposer quelques rudiments) correspond à l'énoncé :

$$\forall n, k \in \mathbb{N} \quad \aleph_0 \rightarrow (\aleph_0)_k^n .$$

Exercice 1.35. Soit κ un cardinal. Montrer que $\kappa^+ \rightarrow (\kappa^+)_\kappa^1$.

Nous sommes maintenant presque prêts pour énoncer le théorème d'Erdős-Rado. Ce théorème s'applique aux cardinaux qui sont obtenus par répétition de l'opération $X \mapsto 2^X$.

Définition 1.36. Soit κ un cardinal infini. On définit par récurrence transfinie $\beth_n(\kappa)$ en posant $\beth_0(\kappa) = \kappa$ et

$$\beth_\alpha(\kappa) = \sup\{2^{\beth_\beta(\kappa)} : \beta < \alpha\}$$

Ainsi, $\beth_n(\kappa)$ (quand n est un entier naturel) est simplement le cardinal obtenu en répétant n fois l'opération $X \mapsto 2^X$ en partant de κ . A titre de remarque, notons que l'hypothèse du continu correspond à l'énoncé $\aleph_1 = \beth_1(\aleph_0)$, tandis que l'hypothèse du continu généralisée signifie que $\aleph_\alpha = \beth_\alpha(\aleph_0)$ pour tout ordinal α .

Théorème 1.37. (*Erdős-Rado*) Pour tout entier naturel n , et tout cardinal infini κ , on a

$$\beth_n(\kappa)^+ \rightarrow (\kappa^+)_\kappa^{n+1} .$$

Preuve.

On va fixer κ et raisonner par récurrence sur n . Pour se simplifier un peu la vie, notons $\lambda_n = \beth_n(\kappa)$.

Pour $n = 0$, on retrouve l'énoncé de l'exercice 1.35, qui ne devrait pas poser trop de problèmes (sinon, il faut reprendre la définition et les propriétés de l'arithmétique cardinale).

Supposons maintenant que l'énoncé soit vrai au rang $n-1$, et considérons une fonction $f : [\lambda_n^+]^{n+1} \rightarrow \kappa$. On va devoir se ramener à des ensembles de taille n si on veut pouvoir raisonner par récurrence ; pour tout $\alpha \in \lambda_n^+$, définissons $f_\alpha : [\lambda_n^+ \setminus \{\alpha\}]^n \rightarrow \kappa$ en posant

$$f_\alpha(A) = f(A \cup \{\alpha\}) .$$

La preuve est maintenant basée sur le lemme suivant :

Lemme 1.1. *On peut construire une suite croissante d'ensembles X_α de λ_n^+ pour $\alpha < \lambda_{n-1}^+$ ^{viii} avec les propriétés suivantes (en notant X la réunion des X_α) :*

- (a) *Pour tout α on a $|X_\alpha| \leq \lambda_n$.*
- (b) *Si $Z \subseteq X$ est tel que $|Z| \leq \lambda_{n-1}$ alors il existe $\alpha < \lambda_{n-1}^+$ tel que $Z \subseteq X_\alpha$.*
- (c) *Si $Z \subseteq X$ est tel que $|Z| \leq \lambda_{n-1}$ et si $\beta \in \lambda_n^+ \setminus Z$ alors il existe $\gamma \in X \setminus Z$ tel que $f_{\beta|_{[Z]^n}} = f_{\gamma|_{[Z]^n}}$.*

Montrons pourquoi ce lemme permet de conclure : notons déjà que l'ensemble X est de cardinal inférieur à $\lambda_{n-1}^+ \cdot \lambda_n = \lambda_n$. Donc il existe $\delta \in \lambda_n^+ \setminus X$.

Construisons maintenant par récurrence transfinie une suite (injective) (y_α) pour $\alpha < \lambda_{n-1}^+$. Prenons n'importe quel $y_0 \in X$; si y_β a été défini pour tout $\beta < \alpha$, alors (en notant $Y_\alpha = \{y_\beta : \beta < \alpha\}$) on choisit un $\gamma \in X \setminus Y_\alpha$ tel que $f_{\delta|_{[Y_\alpha]^n}} = f_{\gamma|_{[Y_\alpha]^n}}$, et on pose $y_\alpha = \gamma$.

Considérons l'ensemble $Y = \{y_\alpha : \alpha < \lambda_{n-1}^+\}$. D'après notre hypothèse de récurrence, il existe un sous-ensemble de Y de cardinal κ^+ qui est homogène pour f_δ , i.e tel que $f_\delta(A)$ soit égal à un certain η pour tout A dans $[Z]^n$.

Vérifions que Z est en fait homogène pour f : soit B une partie de $[Z]^{n+1}$. On a $B = \{y_{\alpha_1}, \dots, y_{\alpha_{n+1}}\}$ et par définition on a, en notant $A = \{y_{\alpha_1}, \dots, y_{\alpha_n}\}$:

$$f(B) = f_{y_{\alpha_{n+1}}}(A) = f_\delta(A) = \eta .$$

Il nous reste à voir pourquoi le lemme est vrai.

On prend $X_0 = \lambda_n$; aux ordinaux limites on posera $X_\alpha = \cup_{\beta < \alpha} X_\beta$, donc on doit simplement expliquer comment construire $X_{\alpha+1}$ pour un ordinal α tel que X_α a été défini. Notons que

$$\lambda_n^{\lambda_{n-1}} = (2^{\lambda_{n-1}})^{\lambda_{n-1}} = 2^{\lambda_{n-1}} = \lambda_n .$$

Par conséquent, puisque X_α est de cardinalité λ_n , il existe λ_n sous-ensembles de X_α de cardinalité λ_{n-1} (cf. l'exercice 1.31).

De même, si $Z \subseteq X_\alpha$ est tel que $|Z| = \lambda_{n-1}$ alors il y a λ_n fonctions de $[Z]^n$, qui est de cardinal λ_{n-1} , dans κ puisque

$$\lambda_n = 2^{\lambda_{n-1}} \leq \kappa^{\lambda_{n-1}} \leq (2^\kappa)^{\lambda_{n-1}} = 2^{\kappa \cdot \lambda_{n-1}} = 2^{\lambda_{n-1}} = \lambda_n .$$

On voit donc bien que $\kappa^{\lambda_{n-1}} = \lambda_n$.

Ces deux remarques sur les cardinaux nous permettent d'affirmer qu'on peut trouver $X_{\alpha+1} \supseteq X_\alpha$ de cardinal λ_n et tel que si $Z \subseteq X_\alpha$ est de cardinal λ_{n-1} ,

viii. notons que $\lambda_{n-1}^+ \leq \lambda_n$

$\beta \in \lambda_n^+ \setminus Z$, alors il existe $\gamma \in X_{\alpha+1} \setminus Z$ tel que $f_{\beta|_{[Z]^n}} = f_{\gamma|_{[Z]^n}}$. En effet, il n'y a que λ_n fonctions à représenter et on peut rajouter à X_α un élément pour chacune de ces fonctions tout en n'augmentant pas le cardinal de X_α . On vérifie alors assez facilement (une fois qu'on a absorbé toutes les définitions!) que cette construction permet de satisfaire toutes les conditions exigées par le lemme. Ceci conclut la preuve du théorème d'Erdős-Rado \square

Notes bibliographiques.

Ce chapitre ne saurait constituer une introduction complète à la théorie des ensembles élémentaire; à ce sujet, le lecteur intéressé est invité à consulter [Hal74] s'il cherche une présentation intuitive de la théorie, et [Mos06] ou [KM] pour une présentation plus formelle et orientée vers les sujets qui apparaîtront dans les chapitres suivants de ces notes.

Le lecteur anglophobe souhaitant se documenter sur le sujet pourra consulter avec profit la traduction française du livre de Kuratowski sus-cité ou le livre de Jean-Louis Krivine [Kri98].

En ce qui concerne l'axiome du choix, il existe une véritable encyclopédie [HR98] présentant ses multiples formes; on pourra y trouver des références sur certains résultats énoncés sans référence dans le corps du chapitre ci-dessus. Le livre de S. Wagon [Wag85] est également très instructif.

Enfin, comme source bibliographique concernant les résultats plus récents de théorie des ensembles (forcing, etc) le lecteur est invité à consulter [Jec03].

Exercices

Exercice 1.38. Comment définiriez-vous α^β pour deux ordinaux α, β ? Donner d'abord une description par récurrence transfinie, puis essayer de décrire une opération sur les ordres qui donne naissance à cette opération (ce n'est pas si facile!)

Exercice 1.39. Démontrer les assertions suivantes :

- 1) Un ordinal α est un entier naturel si, et seulement si, tout sous-ensemble non vide de α a un plus grand élément.
- 2) Tout ensemble non vide d'ordinaux admet une borne supérieure (comment décrire explicitement celle-ci?).
- 3) Montrer que si A est une partie d'un ordinal α , alors la relation d'appartenance définit sur A une relation de bon ordre, qui est isomorphe à un ordinal plus petit que α .

Exercice 1.40.

1) Montrer que l'on peut définir une opération \ominus sur les ordinaux telle que pour tous les ordinaux α, β on ait :

- $\alpha \ominus \beta = 0$ si $\alpha < \beta$
- $\beta + (\alpha \ominus \beta) = \alpha$ si $\alpha \geq \beta$.

Donner un exemple d'ordinaux $\alpha > \beta$ tels qu'il n'existe pas d'ordinal γ tel que $\gamma + \beta = \alpha$.

2) Soient α et β deux ordinaux avec $\beta \neq 0$. Montrer qu'il existe un unique couple d'ordinaux (γ, δ) tel que $\alpha = \beta \cdot \gamma + \delta$ et $\delta < \beta$.

(Indication : on pourra d'abord montrer qu'il existe γ' tel que $\alpha < \beta \cdot \gamma'$ et que le plus petit tel γ' est successeur).

Exercice 1.41. Donner une autre preuve du théorème de Schröder-Bernstein dans le cas où X et Y sont des ensembles bien ordonnables.

Exercice 1.42.

Montrer qu'il existe des ordinaux (donc des cardinaux !) tels que $\alpha = \aleph_\alpha$ ^{ix}.

Exercice 1.43. On reprend les notations introduites lors de la définition de la dérivation de Hausdorff. Montrer que, si on prend un ordinal dénombrable α et qu'on considère $X = \omega^\alpha$, alors \sim_α est la relation grossière.

Exercice 1.44. Soit $(X, <)$ un ensemble dénombrable. On note \sim_α la α -ième relation d'équivalence apparaissant dans la dérivation de Hausdorff de X ; montrer qu'il existe $\alpha < \omega_1$ tel que $\sim_\alpha = \sim_{\alpha+1}$.

Exercice 1.45. (★)

Dans tout cet exercice (X, \leq) est un ensemble ordonné dénombrable et on désigne par \sim_α la relation d'équivalence obtenue à la α -ième étape de la dérivation de Hausdorff.

(1) Montrer que si \sim_1 est la relation triviale alors l'ordre de X est *dense* (i.e si $x < y$ alors il existe z tel que $x < z < y$). En déduire, avec la méthode du va-et-vient, que (X, \leq) contient un sous-ensemble isomorphe à (\mathbb{Q}, \leq) .

(2) En utilisant l'exercice précédent, prouver le résultat suivant : soit il existe $\alpha < \omega_1$ tel que \sim_α est la relation grossière, soit (X, \leq) contient un sous-ensemble isomorphe à (\mathbb{Q}, \leq) .

Exercice 1.46. Soit $(A, <)$ un ensemble totalement ordonné. Prouver l'équivalence suivante : $<$ est un bon ordre sur A si, et seulement si, il n'existe pas de suite $(a_n)_{n \geq 0} \in A^{\mathbb{N}}$ strictement décroissante pour $<$.

Avez-vous utilisé l'axiome du choix ? Si oui, sous quelle forme ?

ix. Indication : considérer l'application $\alpha \mapsto \aleph_\alpha$; en particulier, montrer que pour tout ordinal α l'ordinal $\beta = \sup(\{f^n(\alpha) : n < \omega\})$ est un point fixe de f .

Exercice 1.47. Un cardinal λ est dit régulier si pour tout sous-ensemble a de λ de cardinal strictement inférieur à λ on a $\sup(a) \in \lambda$.

(1) Montrer que tout cardinal fini est régulier, ainsi que \aleph_0 . Le cardinal \aleph_ω est-il régulier ?

Pour deux ordinaux α et β on dit que α est *cofinal* à β s'il existe une fonction $f: \beta \rightarrow \alpha$ strictement croissante et dont l'image n'est pas strictement majorée dans α (autrement dit, pour tout $\gamma \in \alpha$ il existe $\delta \in \beta$ tel que $f(\delta) \geq \gamma$).

(2) Montrer que pour tout ordinal α il existe un plus petit ordinal β tel que α est cofinal à β . On appelle cofinalité de α , et on note $\text{cof}(\alpha)$, cet ordinal.

(3) Montrer que $\text{cof}(\alpha)$ est le plus petit ordinal γ tel qu'il existe une fonction $f: \gamma \rightarrow \alpha$ dont l'image ne soit pas strictement majorée. (4) Montrer que, pour tout ordinal α , $\text{cof}(\alpha)$ est un cardinal.

(5) Montrer que $\text{cof}(\text{cof}(\alpha)) = \text{cof}(\alpha)$ pour tout ordinal α .

(6) Montrer qu'un cardinal λ infini est régulier si et seulement si $\text{cof}(\lambda) = \lambda$.

Exercice 1.48.

(1) Montrer qu'un cardinal κ est régulier si, et seulement si, pour tout $\lambda < \kappa$ et toute famille $(X_\alpha)_{\alpha \in \lambda}$ d'ensembles tels que $|X_\alpha| < \kappa$ pour tout $\alpha < \lambda$, on a $|\cup X_\alpha| < \kappa$.

(2) Soit κ un cardinal; montrer que $\text{cof}(\kappa)$ est le plus petit ordinal γ tel que α soit la réunion de γ ensembles de cardinal strictement inférieur à κ .

(3) Montrer que tout cardinal successeur est régulier.

(4) Quelle est la cofinalité de $\aleph_{\omega+\omega}$? Plus généralement, si $\alpha > \omega$ est un ordinal, quelle est la cofinalité de \aleph_α ?

(5) On appelle *faiblement inaccessible* un cardinal non dénombrable à la fois limite et régulier. Montrer qu'un tel cardinal α doit vérifier $\alpha = \aleph_\alpha$. La réciproque est-elle vraie ?

Commentaire. Dans ZFC on ne peut ni démontrer, ni réfuter, l'existence de cardinaux faiblement inaccessibles : c'est un exemple d'énoncé *indécidable*.

Exercice 1.49. (*Lemme de König*)

Soient $(\kappa_i)_{i \in I}$ et $(\lambda_i)_{i \in I}$ deux familles de cardinaux. On veut prouver que

$$(\forall i \ \kappa_i < \lambda_i) \Rightarrow \sum_{i \in I} \kappa_i < \prod_{i \in I} \lambda_i$$

(1) Commencer par prouver que l'inégalité large est vraie.

(2) On veut montrer par l'absurde que l'inégalité est stricte. Supposons que ce n'est pas le cas; alors, en utilisant la définition des opérations arithmétiques cardinales, on peut trouver deux familles d'ensembles $(A_i)_{i \in I}$ et $(B_i)_{i \in I}$ telles que :

- $|A_i| = \lambda_i$,

- $B_i \subset \prod_{j \in I} A_j$, $|B_i| = \kappa_i$, et
- $\cup_{i \in I} B_i = \prod A_i$.

En repensant à la preuve du théorème de Cantor, obtenir une contradiction.

Exercice 1.50.

- (1) En utilisant le lemme de König, montrer que pour tout cardinal κ on a $\text{cof}(2^\kappa) > \kappa$.
- (2) En déduire une restriction à la négation de l'hypothèse du continu.

Chapitre 2

Rappels de topologie

Dans ce chapitre, on va brièvement rappeler quelques définitions et propriétés de base en topologieⁱ; beaucoup de ces rappels se feront sous forme d'exercices. Après des rappels sur la topologie produit, nous présenterons deux espaces particulièrement importants : l'espace de Cantor et l'espace de Baire.

2.1 Espaces compacts, complets, séparables...

Une *topologie* sur un ensemble X est une famille de parties de X contenant \emptyset et X , stable par intersections finies et par unions quelconques. Un ensemble X muni d'une topologie est appelé un *espace topologique*.

Une *pseudo-distance* sur un ensemble X est une application $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ symétrique, satisfaisant l'*inégalité triangulaire*

$$\forall x, y, z \in X \quad d(x, y) + d(y, z) \leq d(x, z) .$$

Une *distance* est une pseudo-distance d sur X telle que de plus

$$\forall x, y \in X \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y .$$

Un *espace métrique* est un ensemble muni d'une distance.

La topologie *engendrée* par une distance d est la famille des ensembles ouverts pour d , c'est-à-dire qui sont réunion d'une famille de boules ouvertes; un espace topologique est dit *métrisable* si sa topologie est engendrée par une distance d .

Dans la suite on utilisera $B(x, r]$ (resp. $B(x, r[$) pour désigner la boule fermée

i. Les espaces et groupes que nous manipulerons dans la suite seront en fait métrisables, mais pour simplifier la rédaction il vaut mieux introduire les définitions générales

(resp. ouverte) de centre x et de rayon r ; une *isométrie* de (X, d) sur (Y, d') est une bijection entre X et Y telle que $d(x, x') = d'(f(x); f(x'))$ pour tout $(x, x') \in X^2$; une application non surjective mais préservant les distances sera appelée *plongement isométrique* (ou simplement isométrie non surjective). On suppose connues les notions d'adhérence et intérieur dans un espace métrique, ainsi que la notion de suite de Cauchy et de complété d'un espace métrique.

Continuons à fixer notre terminologie :

Définition 2.1. Soit (X, d) un espace métrique. On rappelle que

- (X, d) est *séparable* ssi il a un sous-ensemble dénombrable dense.
- (X, d) est *complet* si toute suite de Cauchy d'éléments de X est convergente.
- (X, d) est *compact* si toute suite d'éléments de X a une sous-suite convergente; de manière équivalenteⁱⁱ (X, d) est compact si de tout recouvrement de X par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini.
- (X, d) est *précompact* si pour tout $\varepsilon > 0$ on peut recouvrir X par un nombre fini de boules de rayon ε .

On utilisera sans démonstration dans la suite des propriétés élémentaires des espaces métriques; certaines d'entre elles sont regroupées dans les exercices ci-dessous.

Exercice 2.2. Soit (X, d) un espace métrique.

- Rappelons qu'une famille d'ouverts $(U_i)_{i \in I}$ est une *base d'ouverts* si pour tout ouvert $U \subseteq X$ il existe $J \subseteq I$ tel que $U = \bigcup_{j \in J} U_j$. Montrer alors que (X, d) est séparable si, et seulement si, il admet une base dénombrable d'ouverts.
- Si $(U_i)_{i \in I}$ est une base de la topologie de X , montrer que l'application qui à x associe l'ensemble des i pour lesquels $x \in U_i$ est injective. En déduire que tout espace métrique séparable X est de cardinal inférieur à 2^{\aleph_0} .
- Prouver que si (X, d) est séparable alors tout sous-ensemble de X , muni de la distance induite, est séparable.

Exercice 2.3. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que si (X, d) est compact et $f: (X, d) \rightarrow (Y, d')$ est surjective alors (Y, d') est compact; en déduire qu'une bijection continue entre espaces compacts métriques est un *homéomorphisme*, c'est-à-dire que sa fonction réciproque est aussi continue.

Les démonstrations en théorie descriptive des ensembles utilisent souvent des techniques de "codage"; pour effectuer ces codages il est parfois plus simple

ii. On admet cette équivalence classique mais non triviale!

de manipuler des espaces bornés, ce qu'on peut faire grâce à la construction décrite dans l'exercice suivant.

Exercice 2.4. Soit (X, d) un espace métrique.

- Montrer que \tilde{d} définie par $\tilde{d}(x, y) = \min(d(x, y), 1)$ est une distance qui définit la même topologie que d .
- Même question avec cette fois $\tilde{d} = \frac{d}{1+d}$; prouver que dans ce cas d et \tilde{d} ont les mêmes isométries et les mêmes applications uniformément continues.

Les espaces les mieux adaptés pour appliquer les techniques de codage évoquées plus haut sont introduits dans la définition ci-dessous.

Définition 2.5. Un espace topologique (X, d) est *zéro-dimensionnel* si X admet une base d'ouverts $(U_i)_{i \in I}$ tels que pour tout i U_i est à la fois ouvert et fermé dans X .

Exemple. Par exemple, $(\mathbb{N}, |\cdot|)$ est 0-dimensionnel; peut-être plus intéressant est le fait que $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ l'est aussi : si on fixe une énumération (q_i) de \mathbb{Q} , alors la famille de boules $B(q_i, \alpha]$ pour α irrationnel est une base de la topologie de \mathbb{Q} constituée d'ouvert-fermés.

La base ci-dessus n'est pas dénombrable; on voit facilement comment la rendre dénombrable, mais est-ce le cas pour tout espace séparable? L'exercice suivant répond à cette interrogation.

Exercice 2.6. Soit (X, d) un espace séparable. Montrer que pour tout ouvert U et toute famille d'ouverts $(U_i)_{i \in I}$ telle que $\bigcup_{i \in I} U_i = U$, il existe un sous-ensemble *dénombrable* $J \subseteq I$ tel que $\bigcup_{j \in J} U_j = U$.

En déduire que si (X, d) est 0-dimensionnel alors (X, d) admet une base dénombrable d'ouverts fermés.

Il nous reste à introduire une dernière notion élémentaire, mais essentielle pour nous, avant de discuter deux exemples très importants; nous allons également en profiter pour introduire les filtres et ultrafiltres, qui ne seront pas essentiels dans ce cours mais sont des objets importants pour les logiciens.

2.2 Topologie produit

Définition 2.7. Soit $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques. On définit la *topologie produit* sur $Y = \prod_{i \in I} X_i$ comme la topologie la moins fine pour laquelle toutes les projections $\pi_i : Y \rightarrow X_i$ sont continues. Autrement dit, la

topologie produit est la topologie sur Y dont une base d'ouverts est donnée par les ensembles de la forme

$$\{x \in \prod X_i : \forall j \in J \ x(j) \in U_j\} .$$

où $J \subseteq I$ est un ensemble fini et chaque U_j est ouvert dans X_j .

Dans le cas particulier où $I = \mathbb{N}$ et chaque X_i est un espace métrique (dont la distance est notée d_i), la topologie produit sur $\prod X_i$ est induite par la distance d_∞ définie par

$$d_\infty(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} \min(1, d(x(i), y(i)))$$

Exercice 2.8. Soit $(X_i, d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'espaces métriques. On munit $\prod X_i$ de la topologie produit et de la distance d_∞ définie ci-dessus.

- Prouver qu'une suite (x_n) converge vers x dans $\prod X_i$ si, et seulement si, on a pour tout i que $x_n(i)$ tend vers $x(i)$.
- En déduire que si les X_i sont complets alors $(\prod X_i, d_\infty)$ est complet.
- Montrer qu'un produit dénombrable d'espaces métriques séparables est séparable.
- Si (X, d) est un espace métrique séparable, et (x_n) est une suite dense dans X , donner explicitement une base d'ouverts de la topologie de $X^{\mathbb{N}}$.
- Montrer que si tous les (X_i) sont 0-dimensionnels alors $\prod X_i$ est aussi 0-dimensionnel.

Exercice 2.9. Soit X un espace topologique, $(Y_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques et $Y = \prod Y_i$ muni de la topologie produit. On note π_i la projection naturelle de Y sur Y_i . Montrer qu'une application $f: X \rightarrow Y$ est continue si, et seulement si, chacune des applications $\pi_i \circ f$ est continue.

Un des résultats fondamentaux sur la topologie produit est le théorème de Tychonoff, qu'on peut établir en utilisant les filtres et ultrafiltres. Ces objets méritent d'être expliqués en détail, d'autant plus qu'ils sont très utiles en logique. Mais ils seront peu utilisés dans ce cours (en réalité on pourrait s'en passer complètement); leurs définitions, propriétés et utilisation en topologie sont détaillées dans l'annexe B, que le lecteur curieux (ou suivant d'autres modules du parcours de logique...) est invité à consulter.

La caractérisation de la compacité par les filtres (dans un univers où l'axiome du choix est vrai) est la suivante; on trouvera la démonstration dans l'annexe B.

Proposition 2.10. Soit (X, τ) un espace topologique séparé. Alors (X, τ) est compact si, et seulement si, tout ultrafiltre sur X est convergent.

Etant donné qu'un filtre sur un produit d'espaces topologiques est convergent si, et seulement si, toutes ses projections sont convergentes, on en déduit immédiatement que le théorème de Tychonoff est vrai.

Dans ce cours, on n'aura pas besoin du théorème de Tychonoff général, mais il est bon de le connaître ; sans filtresⁱⁱⁱ on peut montrer le résultat suivant.

Proposition 2.11. *Soit (X_n, d_n) une suite d'espaces métriques compacts, et $X = \prod X_n$ muni de la topologie produit. Alors X est compact.*

Preuve.

On va utiliser un procédé diagonal. Soit (x_i) une suite d'éléments de X , dont on doit trouver une sous-suite convergente (en effet X est métrisable). Notons $x_i = (x_n^i)_{n \in \mathbb{N}}$. Comme X_1 est compact, il existe une application strictement croissante $\varphi_1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $(x_1^{\varphi_1(i)})$ converge vers $y_1 \in X_1$. De même il existe une application strictement croissante $\varphi_2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $(x_2^{\varphi_1(\varphi_2(i))})$ converge vers $y_2 \in X_2$. En répétant ce procédé, on obtient une suite d'applications strictement croissantes $\varphi_n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telles que $(x_n^{\varphi_1(\dots\varphi_n(i))})$ converge vers $y_n \in X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (quand i tend vers $+\infty$, attention aux doubles indices!).

Posons maintenant $\psi(i) = \varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_n(i)$. C'est une fonction strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} et pour tout n fixé la suite $x_n^{\psi(i)}$ est une suite extraite^{iv} de $(x_n^{\varphi_1(\dots\varphi_n(i))})$, qu'on a définie de façon à ce qu'elle converge vers $y_n \in X_n$. Etant donnée la définition de la topologie produit, cela signifie exactement que $(x_{\psi(i)})$ converge vers (y_n) .

On vient de montrer que toute suite d'éléments de X a une sous-suite convergente, par conséquent X est bien compact. \square

Pour nous, la topologie produit (ou plutôt, certains espaces définis comme des produits d'espaces topologiques "simples") servira surtout dans des preuves de "codage". Donnons un exemple.

Proposition 2.12. *Tout espace métrique séparable est homéomorphe à un sous-ensemble de $[0, 1]^{\mathbb{N}}$.*

Preuve. Soit (X, d) un espace métrique séparable, et $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une partie dénombrable dense de X . Quitte à modifier notre distance, on suppose que d est bornée par 1. Il est alors tentant de considérer l'application $\Phi: X \rightarrow [0, 1]^{\mathbb{N}}$ définie par

$$\Phi(x) = (d(x, x_i))_{i \in \mathbb{N}}$$

iii. mais en utilisant l'axiome des choix dépendants pour pouvoir mettre en place un procédé diagonal!

iv. si l'on oublie les n premiers termes de la suite.

Cette application est continue puisque chacune des applications $\pi_i \circ \Phi$ est continue. Pour voir qu'elle est injective, fixons x, y tels que $\Phi(x) = \Phi(y)$. Prenons une suite $(x_{\varphi(i)})$ qui converge vers x , et notons qu'on a $d(x_{\varphi(i)}, y) = d(x_{\varphi(i)}, x)$ par hypothèse sur x, y . Par conséquent $(x_{\varphi(i)})$ converge vers y , d'où $x = y$.

Reste à voir que Φ est un homéomorphisme sur son image; pour cela on peut par exemple montrer que si F est fermé dans X alors $\Phi(F)$ est fermé dans $\Phi(X)$. Prenons donc un fermé F de X , et considérons une suite (u_n) d'éléments de F qui converge vers $v \in \Phi(X)$. On doit avoir $v = (d(x, x_i))_{i \in \mathbb{N}}$ pour un certain $x \in X$, et $(u_n) = (d(y_n, x_i))$ pour un certain $y_n \in X$. Le fait que (u_n) tende vers v signifie exactement que $d(y_n, x_i)$ tend vers $d(x, x_i)$ pour tout i (fixé) quand n tend vers $+\infty$. Ceci n'est possible que si (y_n) converge vers x , et comme F est fermé dans X on en déduit que $x \in F$ et donc $v = \Phi(x)$ appartient à $\Phi(F)$. \square

2.3 Espace de Baire, espace de Cantor

Avant d'en finir avec ces rappels de topologie métrique, on va introduire deux espaces qui seront omniprésents dans la suite de ce cours.

Définition 2.13. Munissons $2 = \{0, 1\}$ et \mathbb{N} de la distance discrète. Alors on définit l'espace de Cantor $\mathcal{C} = 2^{\mathbb{N}}$ et l'espace de Baire $\mathcal{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, tous deux munis de la topologie produit. On les munit aussi de la distance produit de la distance discrète (respectivement sur 2 et sur \mathbb{N}).

Ces espaces sont tous deux 0-dimensionnels, complets, et \mathcal{C} est même compact. Par contraste, on voit facilement que tout compact K de \mathcal{N} est d'intérieur vide : pour tout n l'application $x \mapsto x(n)$ est continue sur \mathcal{N} et donc bornée sur K . Ceci étant vrai pour tout n , on voit d'après la définition de la topologie produit que K est d'intérieur vide.

Notation.

Dans la suite, si A est un ensemble, et $s \in A^n$ est une suite finie d'éléments de A , on notera

$$N_s = \{x \in A^{\mathbb{N}} : x|_n = s\} .$$

Les N_s forment une base de la topologie de $A^{\mathbb{N}}$.

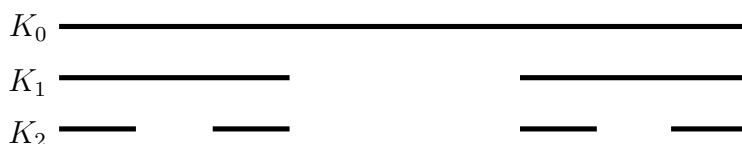
On notera $A^{<\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites finies d'éléments de A ; si $s \in A^{\mathbb{N}}$ on notera $|s|$ la longueur de s .

Exercice 2.14. Soit A un ensemble au plus dénombrable, muni de la distance discrète.

Montrer que la famille (N_s) définie ci-dessus est une base dénombrable d'ouverts-fermés pour la topologie produit sur $A^{\mathbb{N}}$.

On a introduit les espaces de Baire et de Cantor sous forme d'espaces de suites, propice au codage ; mais vous les avez déjà rencontrés en étudiant la topologie de \mathbb{R} .

Exercice 2.15. On peut construire un sous-ensemble de $[0, 1]$ de la façon suivante : on pose $K_0 = [0, 1]$, puis on enlève le segment ouvert du milieu, c'est-à-dire qu'on définit $K_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$, puis on applique la même construction à l'intérieur de chacun des segments, et on continue jusqu'à ω ; autrement dit, on construit $K = \bigcap_{n \in \omega} K_n$. Cet ensemble s'appelle l'*ensemble triadique de Cantor*.



Construction de l'ensemble triadique de Cantor.

Montrer que l'ensemble triadique de Cantor est homéomorphe à \mathcal{C} (indication : si $x \in K$, alors à chaque étape de la construction de K x est soit à gauche soit à droite du segment qui est enlevé, ce qui doit pouvoir se coder avec une suite de 0 et de 1...)

L'espace de Baire, lui, est homéomorphe à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; on peut le prouver directement (cf. les exercices de fin de chapitre) ou bien en utilisant un théorème d'Alexandrov-Urysohn qu'on verra plus tard dans ce cours.

Remarquons enfin que chacun des espaces de Baire et de Cantor contient un sous-ensemble homéomorphe à l'autre ; puisqu'il est clair que \mathcal{N} contient un sous-ensemble homéomorphe à \mathcal{C} , il nous suffit de produire un sous-ensemble de \mathcal{C} homéomorphe à \mathcal{N} . Pour cela, considérons l'ensemble

$$N = \{x \in 2^{\mathbb{N}} : x \text{ prend une infinité de fois la valeur } 1\} .$$

A tout $x = n_0 \frown n_1 \frown \dots$, de \mathcal{N} , associons $f(x) = 0^{n_0} \frown 1 \frown 0^{n_1} \frown 1 \frown \dots$; cette fonction est bien définie sur \mathcal{N} , clairement continue, et à valeurs dans N . On laisse en exercice le fait de vérifier que $f^{-1} : N \rightarrow \mathcal{N}$ est continue.

Enfin, notons la proposition technique suivante, qui nous sera très utile par la suite.

Proposition 2.16. *Soit A un ensemble muni de la distance discrète, et $X = A^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie produit. Alors tout fermé $F \subseteq X$ est un rétract de X , c'est-à-dire qu'il existe une fonction continue $r: X \rightarrow F$ telle que $r|_F = id_F$.*

Dans la pratique, on appliquera le théorème précédent avec $A = 2$ ou $A = \mathbb{N}$.

Preuve.

Pour tout s tel que $N_s \cap F \neq \emptyset$, fixons $y_s \in N_s \cap F$. Pour tout $x \in A^{\mathbb{N}}$, soit $x \in F$ soit il existe un plus grand $n = n_x$ tel que $N_{x|_n} \cap F \neq \emptyset$. Dans le premier cas, on pose $f(x) = x$, dans le second cas on introduit $s = x|_{n_x+1}$ et on pose $f(x) = y_s$.

La fonction f est bien définie, à valeurs dans F , et on a bien $f(x) = x$ pour tout $x \in F$. Reste à vérifier que f est continue en x pour tout $x \in A^{\mathbb{N}}$:

si $x \in F$: Alors pour tout n et tout $y \in A^{\mathbb{N}}$ on voit que si x et y ont les mêmes n premières coordonnées il en va de même de $f(x)$ et $f(y)$, et donc f est continue en x .

$x \notin F$: Alors pour tout y tel que $y|_{n_x+1} = x|_{n_x+1}$ on a $f(x) = f(y)$, par conséquent f est localement constante au voisinage de x et donc continue en x . \square

L'idée de la démonstration précédente est que, si l'on a un ouvert $U \subseteq A^{\mathbb{N}}$ et qu'on construit un élément x de $A^{\mathbb{N}}$, alors on va être obligé de décider en temps fini si $x \in U$ (autrement dit : si on construit x en essayant de toujours se donner le choix entre finir dans U et finir dans son complémentaire, alors l'élément construit appartiendra forcément au complémentaire de U).

Notes bibliographiques. En ce qui concerne les notions et résultats de topologie métrique qui sont utilisés sans démonstration dans le cours, le "Cours de topologie" de G. Choquet [Cho69] est une bonne référence, ainsi que le livre de Kuratowski [KM] ou celui de Moschovakis [Mos06] déjà mentionnés en fin de premier chapitre.

Exercices

Exercice 2.17. Montrer que (X, d) est compact si, et seulement si, (X, d) est à la fois précompact et complet.

Exercice 2.18. Soit (X, d) un espace métrique.

Montrer que X est complet si, et seulement si, toute suite décroissante de fermés $F_n \subseteq X$ telle que $\text{diam}(F_n) \rightarrow 0$ est d'intersection non vide. L'hypothèse sur le diamètre des F_n est-elle nécessaire ?

Exercice 2.19. Montrer que tout compact métrique est séparable. Que pensez-vous de la réciproque ?

Exercice 2.20. Soit (X, d) un espace métrique compact. Montrer que tout plongement isométrique $f: X \rightarrow X$ est surjectif.

Exercice 2.21. Montrer que tout espace métrique dénombrable est 0-dimensionnel.

Exercice 2.22. On rappelle que ω_1 désigne le plus petit ordinal non dénombrable. On munit ω_1 de la topologie de l'ordre, qui est la topologie engendrée par les intervalles ouverts.

1.(a) Montrer que cette topologie est séparée.

(b) Soit $\alpha < \omega_1$. Montrer que α est un point isolé pour cette topologie (i.e $\{\alpha\}$ est ouvert) ssi α est successeur.

(c) Montrer que toute suite d'éléments de ω_1 est bornée et contient une sous-suite convergente ; ω_1 est-il compact ?

(d) Montrer que toute fonction continue $f: \omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$ est constante à partir d'un certain rang.

2(★). Cette fois on introduit la *droite longue* L , qui est $\omega_1 \times [0, 1[$ muni de la topologie de l'ordre, pour l'ordre lexicographique sur $\omega_1 \times [0, 1[$.

(a) Montrer que toute suite croissante d'éléments de L est convergente, puis prouver que toute suite d'éléments de L admet une sous-suite convergente. L est-il compact ? métrisable ?

(b) Montrer que L est localement compact et que tout point de L a un voisinage homéomorphe à un intervalle réel (donc L et \mathbb{R} sont localement homéomorphes).

(c) Finalement, considérons la droite longue étendue, qui est l'espace $L^* = L \cup \{\infty\}$ obtenu en rajoutant à L un point ∞ qui majore tous les éléments de L . Montrer que L^* est compact puis, en vous inspirant de 1(d), montrer que L est homéomorphe au compactifié de Stone-Cëch de L (c'est donc un exemple d'espace pour lequel les compactifiés de Stone-Cëch et d'Alexandrov coïncident).

Exercice 2.23. (★) A l'aide d'un raisonnement de type va-et-vient, montrer que si deux sous-ensembles K_1, K_2 de \mathbb{R} sont homéomorphes à \mathcal{C} alors il existe un homéomorphisme de \mathbb{R} qui envoie K_1 sur K_2^v .

Exercice 2.24. (★) En utilisant le développement en fractions continues, montrer que \mathcal{N} est homéomorphe à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

v. indication : si K est homéomorphe à \mathcal{C} , alors le complémentaire de K est ouvert, donc réunion dénombrable d'intervalles ouverts ; on peut définir un ordre sur ces intervalles par $I \prec J \Leftrightarrow \sup(I) \leq \inf(J)$. Montrer que cet ordre est dense et n'a pas de plus grand ni de plus petit élément.

Chapitre 3

Espaces polonais

Nous arrivons maintenant à la définition des objets fondamentaux de ce cours, les *espaces polonais* ; ceux-ci sont ainsi nommés non pas pour favoriser la construction européenne ou pour délocaliser les mathématiques, mais pour reconnaître le travail exceptionnel de l'école polonaise de la première moitié du vingtième siècle, dont les représentants les plus connus sont Banach, Mazur, Sierpinski, Ulam...

3.1 Définition et caractérisation des espaces polonais ; lemme de Baire

Définition 3.1. Un espace métrisable X est *polonais* si X est séparable et il existe une distance complète induisant la topologie de X .

Par exemple, \mathbb{R} avec sa topologie usuelle est un espace polonais ; tout compact métrisable est polonais. L'espace de Cantor et l'espace de Baire sont tous deux polonais. Plus généralement, notre travail du chapitre précédent nous permet d'affirmer que tout produit dénombrable d'espaces polonais est polonais.

Définition 3.2.

On dira dans la suite qu'un ensemble est G_δ s'il s'écrit comme une intersection dénombrable d'ouverts. Un F_σ est un ensemble dont le complémentaire est G_δ , c'est-à-dire une réunion dénombrable de fermés.

Exercice 3.3. Montrer que dans un espace métrique tout ouvert (ou tout fermé!) est à la fois F_σ et G_δ .

Théorème 3.4. (Alexandrov)

Si (X, d) est polonais alors tout G_δ de X , muni de la topologie induite, est un espace polonais.

Preuve.

Commençons par traiter le cas d'un ouvert $O \subseteq X$; si d est une distance compatible sur X , alors on peut définir une nouvelle distance d_O sur O en posant

$$d_O(x, y) = d(x, y) + \left| \frac{1}{d(x, X \setminus O)} - \frac{1}{d(y, X \setminus O)} \right|.$$

Cette distance définit bien sur O la même topologie que d , puisqu'on a, pour tout $x \in O$ et toute suite (x_n) d'éléments de O , que

$$d(x_n, x) \rightarrow 0 \Leftrightarrow d_O(x_n, x) \rightarrow 0.$$

Il nous reste à montrer que (d_O) est complète; si (x_n) est une suite d_O -Cauchy, alors x_n tend vers $x \in X$, et il est facile de vérifier par l'absurde qu'on doit avoir $x \in O$ (sinon $d(x_n, X \setminus O)$ tend vers 0 et $(1/d(x_n, X \setminus O))$ ne peut pas être de Cauchy dans \mathbb{R}^1).

Si maintenant $O = \bigcap_{n \geq 0} O_n$, alors on peut utiliser la même idée et définir cette fois

$$d_O(x, y) = d(x, y) + \sum_{n \geq 0} \min \left(2^{-n}, \left| \frac{1}{d(x, X \setminus O_n)} - \frac{1}{d(y, X \setminus O_n)} \right| \right)$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que ceci définit bien une distance complète compatible avec la topologie de O . \square

On va voir qu'en fait le théorème d'Alexandrov admet une réciproque. Avant cela, il nous faut analyser les prolongements par continuité de fonctions continues.

Définition 3.5. Soit X, Y deux espaces métriques, $A \subseteq X$ et $f: A \rightarrow Y$ une fonction. Pour tout $x \in \overline{A}$ on définit l'*oscillation* de f en x par la formule

$$\omega(f, x) = \inf_{\varepsilon > 0} (\sup (\{d_Y(f(x_1), f(x_2)) : x_i \in A \text{ et } d_X(x, x_i) < \varepsilon\}))$$

On vérifie immédiatement que f est continue en $x \in A$ si, et seulement si, $\omega(f, x) = 0$; de même, si $x \in \overline{A} \setminus A$ alors si Y est complet f se prolonge par continuité en x si, et seulement si, $\omega(f, x) = 0$.

Théorème 3.6. (Kuratowski)

Soit X, Y deux espaces métriques, $A \subseteq X$, et $f: A \rightarrow Y$ une fonction continue. On suppose que Y est complet; alors il existe une partie B de X telle que $A \subseteq B$, B soit G_δ dans X et f s'étende en une fonction continue $\tilde{f}: B \rightarrow Y$.

i. Ici on utilise la complétude de \mathbb{R} .

Preuve.

Il nous suffit de prouver que $B = \{x \in \bar{A} : \omega(f, x) = 0\}$ est G_δ dans \bar{A} , car alors B sera aussi G_δ dans X et f se prolonge par continuité à B .

Fixons $r > 0$; par définition, on voit que si $\omega(f, x) < r$ alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'on ait $d(f(x_1), f(x_2)) < r$ pour tout $x_1, x_2 \in B(x, \varepsilon[$.

En utilisant l'inégalité triangulaire, on voit donc que pour tout $x' \in B(x, \varepsilon[$ on a $\omega(f, x) < r$.

Autrement dit, pour tout r l'ensemble $A_r = \{x \in \bar{A} : \omega(f, x) < r\}$ est ouvert dans \bar{A} ; par conséquent, $B = \bigcap_n A_{1/n}$ est G_δ dans \bar{A} , donc aussi dans X . \square

Théorème 3.7. (Laverentiev) *Soit X, Y deux espaces métriques complets, $A \subseteq X$ et $f : A \rightarrow X$ un homéomorphisme sur son image. Alors il existe deux G_δ $\tilde{A} \subseteq X$, $\tilde{B} \subseteq Y$ tels que $A \subseteq \tilde{A}$, $B \subseteq \tilde{B}$, et f s'étende en un homéomorphisme de \tilde{A} sur \tilde{B} .*

Preuve

Soit $f' : A' \rightarrow Y$ une fonction prolongeant par continuité f à un G_δ de X , et $g : B \rightarrow X$ une fonction prolongeant par continuité f^{-1} à un G_δ de Y .

Définissons maintenant \tilde{A} , \tilde{B} en posant :

$$\tilde{A} = \{x \in A' : f'(x) \in B \text{ et } g(f'(x)) = x\}; \quad \tilde{B} = \{y \in B : g(y) \in A' \text{ et } f'(g(y)) = y\}$$

On a bien sûr $A \subseteq \tilde{A}$, $B \subseteq \tilde{B}$, et d'autre part $f'(\tilde{A}) = \tilde{B}$, $g(\tilde{B}) = \tilde{A}$. Par conséquent f' est un homéomorphisme de \tilde{A} sur \tilde{B} , qui prolonge f .

Ne reste à démontrer que le fait que \tilde{A} et \tilde{B} sont G_δ ; par symétrie, il suffit de montrer que \tilde{A} est G_δ dans X .

Cela vient du fait que $\Gamma = \{(g(y), y) : y \in B\}$ est fermé dans $X \times B$, donc G_δ dans $X \times Y$; si l'on note φ l'application de A' dans $X \times Y$ définie par $\varphi(x) = (x, f'(x))$ alors on a

$$\tilde{A} = \varphi^{-1}(\Gamma) .$$

Comme l'image réciproque d'un G_δ par une fonction continue est un G_δ , ceci termine la démonstration. \square

Corollaire 3.8. Soit X un espace métrique complet. Alors $A \subseteq X$, muni de la topologie induite, est complètement métrisable si, et seulement si A est G_δ dans X .

Preuve.

On a déjà vu une des implications; pour l'autre, supposons que A est complètement métrisable et appliquons le théorème de Laverentiev avec $Y = A$

et $f: A \rightarrow A$ égale à l'identité. Alors f doit s'étendre en un homéomorphisme d'un G_δ de X sur un G_δ de A contenant A , c'est-à-dire... A . Donc il n'y a pas de place pour étendre f et, par conséquent, A est G_δ dans X . \square

Exercice 3.9. Soit X un espace métrisable. Montrer que X est complètement métrisable ssi X est G_δ dans tout sur-espace métrique ssi X est G_δ dans son complété.

Théorème 3.10. (Théorème de Baire) . Soit (X, d) un espace métrique complet et $(O_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ des ouverts denses. Alors $\bigcap O_n$ est dense dans X .

Preuve.

Soit U un ouvert de X . Par récurrence, on peut, en utilisant la densité des O_i et le fait qu'une intersection finie d'ouverts est ouverte, construire une suite d'ouverts V_n tels que :

- (a) $V_n \subseteq O_n \cap U$;
- (b) $\overline{V_{n+1}} \subseteq V_n$;
- (c) $\text{diam}(V_n) \rightarrow 0$.

Alors par complétude de X on sait que $\bigcap V_n = \bigcap \overline{V_n} \neq \emptyset$, ce qui produit donc un élément de $\bigcap V_n \cap U \subseteq \bigcap O_n \cap U$; par conséquent $\bigcap V_n$ est dense. \square

Remarquons que le théorème de Baire est souvent énoncé sous la forme "soit X un espace métrique complet *ou localement compact* ; alors toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense". Si l'on se place dans le contexte métriqueⁱⁱ, l'hypothèse "localement compact" n'apporte rien : en effet, tout espace métrisable et localement compact admet une distance compatible complète ; c'est une conséquence d'un exercice que vous trouverez en fin de ce chapitre.

Le théorème de Baire est fréquemment utilisé sous la forme suivante : si (X, d) est complet et $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille dénombrable de fermés telle que $\bigcup F_n = X$, alors l'un des F_n est d'intérieur non vide. Pour voir que les deux versions du théorème sont équivalentes, il suffit de remarquer qu'un fermé est d'intérieur vide si et seulement si son complémentaire est un ouvert dense.

Exercice 3.11. Soit X un espace dans lequel le théorème de Baire s'applique. Montrer qu'alors le théorème de Baire s'applique à tout ouvert de X .

Exercice 3.12. Soit (X, d) un espace métrique complet.

ii. Savez-vous construire un espace localement compact mais non métrisable ?

- Utiliser la remarque ci-dessus pour prouver la version suivante du théorème de Baire : si (O_n) est une famille dénombrable d'ouverts denses dans (X, d) , alors pour tout ouvert O de X $O \cap (\bigcap_n O_n)$ est dense dans O .
- Soit (F_n) une famille dénombrable de fermés telle que $\bigcup F_n = X$. Prouver que la réunion des intérieurs des F_n est dense dans X .

Ce théorème est particulièrement utile pour prouver l'existence d'objets satisfaisant certaines propriétés ; c'est la "méthode de la catégorie", qui permet en particulier d'obtenir une "inversion des quantificateurs" : transformer un énoncé de la forme "Quel que soit (...) il existe (...)" en un énoncé "Il existe (...) quel que soit (...)".

Exemple. On va prouver que tout compact dénombrable et métrisableⁱⁱⁱ est homéomorphe à un compact de \mathbb{R} .

Soit $K = \{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un tel compact ; considérons l'ensemble X des fonctions continues de K dans \mathbb{R} , muni de la distance du sup. Cet espace est complet (exercice classique).

Pour toute paire $(i \neq j)$ on peut définir $X_{i,j} = \{f \in X : f(k_i) = f(k_j)\}$. C'est un sous-espace vectoriel fermé de X , et on vérifie facilement, puisque K est métrique, que $X_{i,j} \neq X$. Donc $X_{i,j}$ est pour tout $i \neq j$ un fermé d'intérieur vide, ce dont on déduit en appliquant le théorème de Baire à X qu'il existe $f \in X \setminus \bigcup X_{i,j}$.

Une telle fonction f vérifie $f(k_i) \neq f(k_j)$ pour tout $i \neq j$, autrement dit f est une injection continue de K dans \mathbb{R} . Par conséquent f est un homéomorphisme sur son image. \square

3.2 Ensembles Baire-mesurables

Définition 3.13. Soit X un ensemble. Un σ -idéal est une famille \mathcal{I} de parties de X ne contenant pas $\{X\}$ telle que

- $\forall A, B \subseteq X (A \in \mathcal{I} \text{ et } B \subseteq A) \Rightarrow (B \in \mathcal{I})$
- $\forall (A_n) \in \mathcal{P}(X)^{\mathbb{N}} : (\forall n A_n \in \mathcal{I}) \Rightarrow (\bigcup A_n \in \mathcal{I})$.

Un exemple instructif de σ -idéal est donné par la famille des ensembles de mesure nulle pour une mesure donnée sur X (par ex, la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}). On pense en général à un σ -idéal comme à une notion de "petitesse" : un ensemble est petit (selon \mathcal{I}) s'il appartient à \mathcal{I} . Bien sûr, la notion de petitesse considérée dépend de l'idéal !

Si \mathcal{I} est un σ -idéal, on dira que A et B sont *égaux modulo \mathcal{I}* si $A \Delta B \in \mathcal{I}$.

iii. l'hypothèse "métrisable" est redondante, mais on n'a pas les outils de topologie pour le montrer simplement.

Ainsi, un ensemble est égal à \emptyset modulo \mathcal{I} si, et seulement si, il appartient à \mathcal{I} . On voit aussi que l'égalité modulo \mathcal{I} est une relation transitive.

On n'étudiera pas dans l'immédiat les σ -idéaux en général, mais on va constamment utiliser un σ -idéal particulier : celui qui est formé par les *ensembles maigres*.

Définition 3.14. Soit X un espace topologique. On dit que $Y \subseteq X$ est *maigre* si Y est contenu dans une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide ; on dit que Y est *comaigne* si le complémentaire de Y est maigre.

Par exemple, un ensemble dénombrable est maigre dans X dès que X n'a pas de points isolés ; l'ensemble triadique de Cantor est maigre dans \mathbb{R} , l'ensemble des irrationnels est comaigne dans \mathbb{R} .

Il est clair que les ensembles maigres forment un σ -idéal ; remarquons que dans un espace polonais un ensemble ne peut pas être à la fois maigre et comaigne : si $X = Y_1 \cup Y_2$ où Y_1 et Y_2 sont maigres tous les deux, alors X est recouvert par une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide, ce qui contredit le théorème de Baire.

Dans la suite on notera $A =^* B$ pour signifier que $A \Delta B$ est maigre. Tout comme dans la théorie de Lebesgue, on a besoin de se restreindre à certains ensembles "sympathiques" (l'analogue des ensembles mesurables) pour utiliser le σ -idéal formé par les ensembles maigres.

Définition 3.15. Soit X un polonais. Un sous-ensemble A est *Baire-mesurable* s'il existe un ouvert $O \subseteq X$ tel que $A =^* O$ (de manière équivalente, $A \setminus O$ et $O \setminus A$ sont tous les deux maigres).

Proposition 3.16. Soit X un espace topologique. Alors la famille des sous-ensembles Baire-mesurables de X est une σ -algèbre ; plus précisément, c'est la σ -algèbre engendrée par les ouverts et les ensembles maigres.

Rappelons que la tribu borélienne sur X est la σ -algèbre engendrée par les ouverts ; cette proposition entraîne donc en particulier que tout borélien est Baire-mesurable.

Preuve.

Supposons que $A =^* O$ pour un certain ouvert O . Notons déjà que $\overline{O} \setminus O$ est maigre, donc $X \setminus O =^* X \setminus \overline{O}$. De plus $(X \setminus A) \Delta (X \setminus O) = A \Delta O$ est maigre donc on a $X \setminus A =^* X \setminus O =^* X \setminus \overline{O}$. Comme $X \setminus \overline{O}$ est ouvert, on vient de montrer que $X \setminus A$ est Baire-mesurable.

Soit maintenant une suite (A_n) de sous-ensembles Baire-mesurables de X , et (O_n) une suite d'ouverts tels que $A_n =^* O_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\cup O_n$ est ouvert, et

$$\left(\bigcup A_n \right) \Delta \left(\bigcup O_n \right) \subseteq \left(\bigcup (A_n \Delta O_n) \right) .$$

Comme une réunion dénombrable d'ensembles maigres est maigre, on vient de prouver que $\cup A_n =^* \cup O_n$, et donc en particulier que $\cup A_n$ est Baire-mesurable. \square

Exercice 3.17. Soit X un polonais, et $B \subseteq X$ une partie non maigre et Baire-mesurable. Montrer qu'il existe un ouvert non vide O tel que B soit comaigne dans O .

Avant de pousser plus loin notre étude des ensembles Baire-mesurables, notons tout de suite que, comme dans le contexte mesuré, l'axiome du choix permet de construire des ensembles n'ayant pas cette propriété (il est d'ailleurs consistant avec ZF que tout ensemble de réels soit Baire-mesurable). On verra un exemple un peu plus loin.

Exercice 3.18. Soit X et Y deux polonais et $A \subseteq X \times Y$ un sous-ensemble Baire-mesurable. Montrer que $A \times Y$ est Baire-mesurable dans $X \times Y$.

L'analogie mesure/catégorie se prolonge, puisqu'on peut démontrer un analogue du théorème de Fubini ; si X, Y sont deux ensembles et $A \subseteq X \times Y$, alors pour tout $x \in X$ on pose $A_x = \{y \in Y : (x, y) \in A\}$ et de même on définit pour tout $y \in Y$ $A^y = \{x \in X : (x, y) \in A\}$. On appelle $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$ la projection sur X , et π_Y la projection sur Y .

Théorème 3.19. (Kuratowski-Ulam)

Soit X, Y deux espaces polonais, et $A \subseteq X \times Y$ un ensemble Baire-mesurable.

Alors :

(1) Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) A est comaigne.

(b) L'ensemble $\{x \in X : A_x \text{ est comaigne}\}$ est comaigne dans X .

(c) L'ensemble $\{y \in Y : A^y \text{ est comaigne}\}$ est comaigne dans Y .

(2) L'ensemble $\{x \in X : A_x \text{ est Baire-mesurable}\}$ est comaigne dans X .

(3) L'ensemble $\{y \in Y : A^y \text{ est Baire-mesurable}\}$ est comaigne dans Y .

Une conséquence immédiate de ce théorème est que, si $A \subseteq X \times Y$ est maigre, alors A_x (resp. A^y) est maigre pour un ensemble comaigne de $x \in X$ (resp. $y \in Y$).

Preuve.

Il suffit de montrer que (2) et (a) \Leftrightarrow (b) sont vraies. On va commencer par prouver que (a) \Leftrightarrow (b).

(a) \Rightarrow (b) :

Commençons par traiter le cas où A est ouvert. Fixons une base d'ouverts (U_n) de la topologie de Y et définissons pour tout entier n un ouvert V_n par

$$V_n = \pi_X(A \cap (X \times U_n)) = \{x \in X : A_x \cap U_n \neq \emptyset\} .$$

On va montrer que V_n est dense pour tout n ; comme par définition on a $U_n \cap A_x \neq \emptyset$ pour tout $x \in \bigcap_n V_n$, ceci implique que pour tout $x \in \bigcap_n V_n$ A_x est un ouvert dense. Par conséquent prouver que chaque V_n est dense suffira à établir $(a) \Rightarrow (b)$ dans le cas particulier où A est ouvert.

Soit donc n un entier, et U un ouvert de X tel que $V_n \cap U = \emptyset$; la définition de V_n assure alors que

$$\forall x \in U \forall y \in U_n (x, y) \notin A .$$

Ainsi, l'ouvert $U \times U_n$ est disjoint de l'ouvert dense A , ce qui n'est possible que si $U \times U_n = \emptyset$, c'est-à-dire si $U = \emptyset$. Donc V_n est dense dans X .

Traisons maintenant le cas général. Soit donc $A \subseteq X \times Y$ une partie co-maigre, et fixons une suite d'ouverts denses (U_n) de $X \times Y$ tels que $\bigcap U_n \subseteq A$. Alors pour tout n l'ensemble $\{x \in X : (U_n)_x \text{ est co-maigre}\}$ est co-maigre, et donc l'ensemble $\{x \in X : (\bigcap U_n)_x \text{ est co-maigre}\}$ est co-maigre. Puisque $(\bigcap U_n)_x \subseteq A_x$, on en déduit que $\{x \in X : A_x \text{ est co-maigre}\}$ est co-maigre, ce qui prouve que $(a) \Rightarrow (b)$.

On déduit de $(a) \Rightarrow (b)$ que si $A \subseteq X \times Y$ est Baire-mesurable et maigre, alors $\{x \in X : A_x \text{ est maigre}\}$ est co-maigre.

$(b) \Rightarrow (a)$:

Il existe un ouvert U tel que $A \Delta U$ soit maigre; supposons par l'absurde que U n'est pas dense. Alors il existe des ouverts non vides $V \subseteq X$, $W \subseteq Y$ tels que $U \cap (V \times W) = \emptyset$.

On sait, d'après $(a) \Rightarrow (b)$, que l'ensemble $\{x \in X : U_x \Delta A_x \text{ est maigre}\}$ est co-maigre, donc est en particulier co-maigre dans V ; puisque pour tout $x \in V$ $U_x \cap W = \emptyset$, on en déduit que $\{x \in V : A_x \text{ est maigre dans } W\}$ est co-maigre dans V . Mais alors par hypothèse sur A il doit exister $x \in V$ tel que A_x soit à la fois co-maigre et maigre dans W , ce qui contredit le théorème de Baire.

Preuve de (2) :

Soit $U \subseteq X \times Y$ un ouvert tel que $A \Delta U$ soit maigre. Alors on a que $\{x \in X : (A \Delta U)_x \text{ est maigre}\}$ est co-maigre. Puisque U_x est ouvert pour tout x et $(A \Delta U)_x = A_x \Delta U_x$, ceci prouve que (2) est vraie. \square

Soit maintenant X un espace polonais, et $P \subseteq X$ un sous-ensemble de X . On notera dans la suite

$$\forall^* x \in X P(x)$$

pour signifier que l'ensemble des x satisfaisant P est co-maigre, et

$$\exists^* x \in X P(x)$$

pour signifier que l'ensemble des x satisfaisant P est non-maigre.

Alors le théorème de Kuratowski-Ulam peut se résumer ainsi : si $P \subseteq X \times Y$ est Baire-mesurable, alors

- $\forall^* x P_x$ est Baire-mesurable
- $(\forall^*(x, y) P(x, y)) \Leftrightarrow (\forall^* x \forall^* y P(x, y)) \Leftrightarrow (\forall^* y \forall^* x P(x, y))$
- $(\exists^*(x, y) P(x, y)) \Leftrightarrow (\exists^* x \exists^* y P(x, y)) \Leftrightarrow (\exists^* y \exists^* x P(x, y))$

On utilisera ces propriétés sans plus de justification dans la suite.

On a vu dans le chapitre 1 que, modulo l'axiome du choix, \mathbb{R} peut être bien ordonné ; on se doute qu'un bon ordre sur \mathbb{R} est assez étrange. Le théorème suivant justifie cette intuition.

Théorème 3.20. *Soit $<$ un bon ordre sur \mathbb{R} . Alors $<$, vu comme sous-ensemble de \mathbb{R}^2 , n'est pas Baire-mesurable.*

Preuve.

Commençons par traiter le cas où $<$ est maigre ; alors d'après le théorème de Kuratowski-Ulam appliqué à $\{(x, y) : x < y\}$ on a que

$$\forall^* x \forall^* y \neg(x < y) \text{ et } \forall^* y \forall^* x \neg(x < y).$$

Par conséquent,

$$\forall^* x \forall^* y y = x$$

Ceci entraînerait qu'il existe x tel que $\{x\}$ est comeigre, ce qui paraît somme toute relativement peu raisonnable.

Supposons maintenant que $<$ est non-maigre ; alors il existe un ensemble non maigre de x tels que $\{y : y < x\}$ est non maigre et Baire-mesurable.

Appelons x_0 le plus petit tel x et notons $Y = \{y : y < x_0\}$, puis posons $<' = <|_Y = \{(y, y') \in Y^2 : y < y'\}$.

Notons que $Y^2 = (X \times Y) \cap (Y \times X)$, ce dont on déduit que Y^2 , et donc $<'$, est Baire-mesurable.

Par définition de $<'$, on a

$$\forall^* x \forall^* y \neg(y <' x)$$

Donc aussi

$$\forall^* y \forall^* x \neg(y <' x) .$$

Comme Y est non maigre, on obtient qu'il existe $x \in Y$ tel que $\{y \in Y : y < x\}$ et $\{y \in Y : x < y\}$ sont tous deux maigres, mais alors Y lui-même est maigre, ce qui est une contradiction. \square

Notes bibliographiques.

Ce chapitre s'inspire essentiellement du livre de A.S Kechris [Kec95], et un peu du livre de S.M Srivastava [Sri98]. Enfin, le lecteur curieux d'explorer les liens entre mesure et catégorie est appelé à consulter le très beau livre de J. Oxtoby [Oxt80] sur le sujet.

Exercices

Exercice 3.21. Montrer qu'un espace vectoriel séparable, normé, complet sur \mathbb{R} est de dimension (algébrique) finie ou non dénombrable.

Exercice 3.22. Soit $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que pour tout x il existe n tel que $f^{(n)}(x) = 0$. Montrer qu'alors f est un polynôme^{iv}.

Exercice 3.23. (Première loi du 0 – 1 topologique)

Soit X un polonais, et G un groupe d'homéomorphismes agissant *topologiquement transitivement*, c'est-à-dire que pour tous ouverts $U, V \subset X$ il existe $g \in G$ tel que $g(U) \cap V \neq \emptyset$. Montrer qu'alors tout ensemble G -invariant et Baire-mesurable est soit maigre soit comaigne.

Exercice 3.24. Soit (X_n) une suite de polonais. On dit que $A \subseteq \prod X_n$ est un ensemble de queue si

$$\forall x, y \in \prod X_n (x \in A \text{ et } y(n) = x(n) \text{ sauf pour un nombre fini de } n) \Rightarrow y \in A$$

Prouver qu'un ensemble de queue Baire-mesurable est soit maigre soit comaigne.

Exercice 3.25. Soit \mathcal{U} un ultrafiltre non principal sur \mathbb{N} , qu'on peut voir comme une partie de $2^{\mathbb{N}}$. Montrer que \mathcal{U} n'est pas Baire-mesurable.

Exercice 3.26. Montrer qu'un bon ordre sur \mathbb{R} n'est pas Lebesgue-mesurable.

Exercice 3.27. (cf [Sri98], p62).

Soit X un espace métrisable et $Y \subseteq X$ un sous-ensemble localement compact et dense. Alors Y est ouvert dans X .

iv. Le résultat est encore valide si l'on suppose $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ , mais c'est nettement plus dur à établir!

Chapitre 4

Groupes polonais

4.1 Définition, exemples

Définition 4.1. Un *groupe topologique* (G, \cdot) est un groupe muni d'une topologie pour laquelle les opérations $(g, h) \mapsto g \cdot h$ et $g \mapsto g^{-1}$ sont continues. Un *groupe polonais* est un groupe topologique dont la topologie est polonaise.

On s'intéressera dans la suite essentiellement aux groupes polonais.

Exemple. $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, les espaces vectoriels normés complets sont des groupes polonais abéliens.

Exemple. Soit $\mathcal{S}_\infty \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$ le groupe des permutations de \mathbb{N} . Munissons \mathcal{S}_∞ de la topologie induite par la topologie produit, c'est-à-dire voyons \mathcal{S}_∞ comme un sous-ensemble de \mathcal{N} . Alors :

$$\forall x \in \mathcal{N} (x \in \mathcal{S}_\infty) \Leftrightarrow ((\forall n \neq m \ x(n) \neq x(m)) \text{ et } (\forall n \exists m \ x(m) = n))$$

A m, n fixés les ensembles $\{x \in \mathcal{N} : x(n) \neq x(m)\}$ et $\{x \in \mathcal{N} : x(m) = n\}$ sont ouverts-fermés, ce dont on déduit que \mathcal{S}_∞ est G_δ dans \mathcal{N} et donc \mathcal{S}_∞ est polonais ; on vérifie facilement que les opérations de groupe sont continues, donc \mathcal{S}_∞ est un groupe polonais.

On vérifie facilement qu'un produit fini ou dénombrable de groupes polonais est un groupe polonais ; on verra plus tard comment traiter les quotients.

Exercice 4.2. Si $x \neq y \in \mathcal{S}_\infty$, on définit $n_{x,y}$ comme le plus petit n tel que $x(n) \neq y(n)$ et on pose $d(x, y) = 2^{-n_{x,y}}$. Montrer que d est une distance invariante à gauche qui induit la topologie de \mathcal{S}_∞ mais que d n'est pas complète (on pourra même montrer que le complété de (\mathcal{S}_∞, d) s'identifie naturellement à l'ensemble des injections de \mathbb{N} dans \mathbb{N}).

Avec les mêmes notations que ci-dessus, on pose $\tilde{d}(x, y) = d(x, y) + d(x^{-1}, y^{-1})$. Montrer que \tilde{d} est une distance complète sur \mathcal{S}_∞ et que \tilde{d} n'est pas invariante à gauche.

Exemple. Une classe très riche d'exemples est fournie par les *groupes d'isométries* : si (X, d) est un espace métrique complet séparable (i.e un espace *métrique polonais*) alors son groupe d'isométries $Iso(X, d)$, muni de la topologie de la convergence simple, est un groupe polonais.

Pour le voir, commençons par fixer un sous-ensemble dénombrable dense $\{x_n\}$ de X , supposons sans perte de généralité que d est bornée par 1 et considérons la distance δ suivante sur $Iso(X, d)$:

$$\delta(\varphi, \psi) = \sum_{i=1}^{+\infty} 2^{-i} d(\varphi(x_i), \psi(x_i)) .$$

Notons que, pour toute suite d'isométries (φ_n) et toute isométrie φ on a :

$$(\forall x \in X \varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x)) \Leftrightarrow (\forall i \in \mathbb{N} \varphi_n(x_i) \rightarrow \varphi(x_i))$$

Ceci permet de vérifier que la distance δ ci-dessus induit bien la topologie de la convergence simple sur $Iso(X)$. La continuité des opérations de groupe sur $(Iso(X), \delta)$ est un bon exercice (qui utilise le fait que l'on considère des isométries!). Maintenant, comment voir que $Iso(X)$ est un groupe polonais? On peut voir que $Iso(X)$ est homéomorphe à un G_δ dans $X^\mathbb{N}$, ou bien prouver que la distance $\tilde{\delta}$ définie par

$$\tilde{\delta}(\varphi, \psi) = \delta(\varphi, \psi) + \delta(\varphi^{-1}, \psi^{-1})$$

est une distance complète. Le fait de mener à bien (au moins) une de ces vérifications est laissé en exercice.

Exemple. Un dernier exemple de groupe polonais : le groupe d'automorphismes de l'espace mesuré $[0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue λ (où l'on identifie deux applications qui coïncident λ -presque partout). Ici, la topologie polonaise naturelle est celle de la *convergence en mesure* ; c'est-à-dire qu'une suite T_n de bijections préservant la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$ converge vers 1 si

$$\forall A \lambda(T_n(A) \Delta A) \rightarrow 0 .$$

Il est facile de vérifier que les opérations de groupe sont continues ; il nous resterait à définir une distance complète, séparable, induisant la topologie de la convergence en mesure.

Avant cela, introduisons l'*algèbre de mesure* $MALG_\lambda$ sur $[0, 1]$ qui est l'espace

formé par les parties mesurables de $[0, 1]$ (où l'on identifie deux parties dont la différence symétrique est de mesure nulle), muni de la distance

$$d(A, B) = \lambda(A \Delta B) .$$

C'est un bon exercice que de vérifier que, par exemple, les intervalles à extrémités rationnelles sont denses dans $(MALG_\lambda, d)$, qui se trouve donc être un espace métrique séparable. De plus $(MALG_\lambda, d)$ est complet, et c'est donc en fait un espace métrique polonais.

Il est possible de vérifier que la topologie de la convergence en mesure sur $Aut([0, 1], \lambda)$ coïncide avec la topologie héritée en voyant $Aut([0, 1], \lambda)$ comme sous-groupe de $Iso(MALG_\lambda)$ (exercice facile, à faire), et que $Aut([0, 1], \lambda)$ coïncide en fait avec l'ensemble des isométries de $MALG_\lambda$ qui envoient \emptyset sur \emptyset . Ce dernier groupe est fermé dans $Iso(MALG_\lambda)$, et on a fini de présenter notre topologie polonaise sur $Aut([0, 1], \lambda)$.

L'exemple précédent montre qu'il n'est pas nécessairement facile de se convaincre qu'un groupe est polonais ; notons qu'on aurait pu introduire la topologie sur $Aut([0, 1], \lambda)$ de plusieurs façons différentes (par exemple, en le faisant agir par isométries sur $L^2([0, 1])$ et en le voyant comme sous-groupe du groupe unitaire de L^2). On obtient à chaque fois la même topologie ; il est alors tentant de se demander s'il peut exister des topologies polonaises différentes sur ce groupe pour lesquelles les opérations de groupe sont continues. On n'abordera pas directement ce problème particulier dans la suite, mais il est intimement lié aux théorèmes de continuité automatique qu'on évoquera un peu plus loin.

Avant cela, nous allons essayer de dégager quelques propriétés de la classe des groupes polonais. Comme d'habitude, le théorème de Baire nous aide :

Théorème 4.3. *Soit G un groupe polonais et $H \subseteq G$ un sous-groupe qui est polonais pour la topologie induite. Alors H est fermé dans G .*

Les sous-groupes polonais de G sont donc exactement ses sous-groupes fermés.

Preuve.

La fermeture \overline{H} de H est un sous-groupe fermé (donc polonais) de G , et H est un G_δ dense de \overline{H} . Pour tout $g \in \overline{H}$, gH est aussi un G_δ dense de \overline{H} (puisque $x \mapsto g.x$ est un homéomorphisme qui laisse \overline{H} stable). D'après le théorème de Baire, on a donc $H \cap gH \neq \emptyset$, c'est-à-dire $g \in H$. \square

4.2 Distances invariantes à gauche et groupe complété

Commençons par établir un résultat fondamental sur la métrisabilité des groupes topologiques.

Théorème 4.4. (Birkhoff-Kakutani)

Soit G un groupe topologique. Alors G est métrisable si et seulement si G est séparé et à base dénombrable de voisinages de 1. De plus tout groupe métrisable admet une distance invariante à gauche (c'est-à-dire que les translations à gauche sont des isométries).

On va présenter rapidement la preuve, dont une version plus détaillée se trouve dans [Gao09].

Preuve.

Soit G un groupe séparé et $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base dénombrable de voisinages de 1 ; sans perte de généralité on suppose que chaque U_n est ouvert, symétrique (en considérant $U_n \cap U_n^{-1}$) et $U_0 = G$. L'idée maintenant pour définir une distance est la suivante : $g = h$ si et seulement si $g^{-1}h \in V_n$ pour tout n , par conséquent il est tentant de poser $n(g, h) = \min(\{n : g^{-1}h \in U_n\})$, puis $d(g, h) = 2^{-n(g, h)}$ pour tout $g \neq h$. Cette fonction est symétrique, invariante à gauche et sépare les points mais ne satisfait pas a priori l'inégalité triangulaire. On va donc devoir faire un peu de combinatoire pour remédier à cela. A partir de (U_n) , on peut définir en utilisant la continuité des opérations de groupe une nouvelle famille d'ouverts (V_n) satisfaisant les propriétés suivantes :

1. $V_0 = G ; V_{n+1} \subseteq V_n ;$
2. $\forall n V_n \subseteq U_n ;$
3. $\forall n V_{n+1}^3 \subseteq V_n$ et $V_n = V_n^{-1}$.

La famille $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est encore une base de voisinages de 1 ; on pose maintenant

$$\rho(g, h) = \inf (\{2^{-n} : g^{-1}h \in V_n\})$$

Notons que ρ est invariante par translation à gauche, symétrique, positive, sépare les points et que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $g_0, g_1, g_2, g_3 \in G$ on a

$$(\rho(g_0, g_1) \leq \varepsilon \text{ et } \rho(g_1, g_2) \leq \varepsilon \text{ et } \rho(g_2, g_3) \leq \varepsilon) \Rightarrow \rho(g_0, g_3) \leq 2\varepsilon \quad (*)$$

Maintenant, on peut définir notre distance d : disons qu'une suite finie (g_0, \dots, g_n) d'éléments de G est un *chemin* de g_0 à g_n ; pour tout chemin

4.2. DISTANCES INVARIANTES À GAUCHE ET GROUPE COMPLÉTÉ 51

$\gamma = (g_0, \dots, g_n)$ définissons sa *longueur* $l(\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} \rho(g_i, g_{i+1})$ et enfin posons, pour $g, h \in G$:

$$d(g, h) = \inf (\{l(\gamma) : \gamma \text{ est un chemin de } g \text{ à } h\}) .$$

Il est immédiat que d est une pseudo-distance. Pour voir que d est une distance qui induit notre topologie, on va prouver que

$$\forall g, h \in G \quad d(g, h) \geq \frac{1}{2} \rho(g, h) .$$

Ceci montrera que d est une distance ; de plus, comme g_n tend vers G si et seulement si $g_n^{-1}g$ tend vers 1 si et seulement si $\rho(g_n, g)$ tend vers 0 si et seulement si $d(g_n, g)$ tend vers 0, on aura aussi montré que d induit bien la topologie de G .

Finalement, il nous suffit de démontrer que si $\gamma = (g_0, \dots, g_n)$ est un chemin de $g = g_0$ jusqu'à $h = g_n$, on a $2l(\gamma) \geq \rho(g, h)$. Raisonnons par récurrence sur n : pour $n = 1$ il n'y a rien à montrer, et pour $n = 2, 3$ c'est la propriété (*) ci-dessus qui nous donne le résultat souhaité. Supposons maintenant $n \geq 4$ et le résultat démontré pour tout chemin de cardinal $k < n$.

Si $2\rho(g_0, g_1) \geq l(\gamma)$ alors en appliquant l'hypothèse de récurrence au chemin $\delta = (g_1, \dots, g_n)$, on obtient $\rho(g_1, g_n) \leq 2l(\delta) \leq l(\gamma)$. Comme il est bien clair que $\rho(g_0, g_1) \leq l(\gamma)$, la propriété (*) nous donne bien $\rho(g_0, g_n) \leq 2l(\gamma)$. On conclut de même si $2\rho(g_{n-1}, g_n) \geq l(\gamma)$.

Maintenant, si $0 \leq m \leq n - 1$, appelons γ_m le chemin (g_0, \dots, g_m) et γ'_m le chemin (g_{m+1}, \dots, g_n) . Choisissons le plus grand entier m tel que $l(\gamma_m) \leq \frac{l(\gamma)}{2}$. Etant donné ce qu'on a vu plus haut, on a $1 \leq m \leq n - 2$. De plus on doit avoir

$$l(\gamma_m) \leq \frac{1}{2}l(\gamma) \text{ et } l(\gamma'_m) \leq \frac{1}{2}l(\gamma) .$$

En appliquant notre hypothèse de récurrence, on en déduit que

$$\frac{\rho(g_0, g_m)}{2} \leq \frac{l(\gamma)}{2} \text{ et } \rho(g_{m+1}, g_n) \leq \frac{l(\gamma)}{2}$$

Comme il est clair que $\rho(g_m, g_{m+1}) \leq l(\gamma)$; la propriété (*) donne finalement bien $l(g_0, g_n) \leq 2l(\gamma)$. □

Il est maintenant tentant de penser que, si G est un groupe polonais, alors G admet une distance compatible d qui soit *en même temps* invariante à gauche et complète ; comme on va le voir, ce n'est pas le cas.

Lemme 4.1. *Soit G un groupe métrisable, (g_n) une suite d'éléments de G et d, δ deux distances invariantes à gauche induisant la topologie de G . Alors (g_n) est d -Cauchy si, et seulement si, (g_n) est δ -Cauchy.*

Preuve.

Il suffit évidemment de montrer que si (g_n) est d -Cauchy alors (g_n) est δ -Cauchy. Fixons donc $\varepsilon > 0$; puisque d et δ induisent la même topologie, il existe r tel que $B_d(id, r) \subseteq B_\delta(id, \varepsilon)$. Puisque (g_n) est d -Cauchy, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(g_n, g_m) \leq r$ pour tout $n, m \geq N$. Mais alors pour tout $n, m \geq N$ on a $d(id, g_n^{-1}g_m) < r$ donc $\delta(id, g_n^{-1}g_m) < \varepsilon$, ou encore $\delta(g_n, g_m) < \varepsilon$. \square

En particulier, si G est un groupe topologique métrisable, G admet une distance à la fois complète et invariante à gauche si, et seulement si, toutes les distances compatibles et invariantes à gauche sur G sont complètes.

On a vu plus haut une distance invariante à gauche et non complète sur \mathcal{S}_∞ ; par conséquent \mathcal{S}_∞ n'admet pas de distance complète et invariante à gauche.

On va maintenant évoquer une construction qui aboutit à un analogue pour un groupe métrisable du complété d'un espace métrique. Si G est un groupe métrisable, on a d'après ce qui précède une notion de "suite de Cauchy à gauche dans G "; on peut l'utiliser pour construire le complété de G , mais il faut faire attention à ce que ce complété soit bien un groupe! Il est bon ici de méditer l'exemple de la distance invariante à gauche sur \mathcal{S}_∞ , et prendre les inverses en compte.

Soit G un groupe topologique, et d une distance compatible invariante à gauche. On note \overline{G} , le complété de G pour la distance D définie par $D(x, y) = d(x, y) + d(x^{-1}, y^{-1})$. Remarquons tout de suite que l'espace \overline{G} ainsi obtenu ne dépend pas du choix de d , comme le montre le lemme 4.1.

Théorème 4.5.

Soit G un groupe topologique métrisable, et \overline{G} son complété. Alors (\overline{G}, D) est un groupe topologique (et donc un groupe polonais si G est séparable). On l'appelle le groupe complété de G .

Preuve.

Il s'agit essentiellement de montrer que si (g_n) et (h_n) sont deux suites D -Cauchy dans G alors $(g_n h_n)$ est D -Cauchy.

Soit donc $(g_n), (h_n)$ deux suites D -Cauchy d'éléments de G . Etant donnée la

définition de D (et en particulier le fait que $g \mapsto g^{-1}$ est une D -isométrie) il suffit de vérifier que $(g_n h_n)$ est d -Cauchy. Notons que pour tout n, m, p on a

$$d(g_n h_n, g_m h_m) \leq d(g_n h_n, g_n h_p) + d(g_n h_p, g_m h_p) + d(g_m h_p, g_m h_m) .$$

Autrement dit, $d(g_n h_n, g_m h_m) \leq d(h_n, h_p) + d(h_m, h_p) + d(g_n h_p, g_m h_p)$. Fixons $\varepsilon > 0$, et choisissons N tel que $d(h_n, h_m) \leq \varepsilon$ pour tout $n, m \geq N$. Par continuité de la multiplication à droite par h_N , il existe $\delta > 0$ tel que $d(gh_N, g'h_N) \leq \varepsilon$ pour tout g, g' tels que $d(g, g') \leq \delta$. Si l'on prend N' tel que $d(g_n, g_m)$ soit inférieur à δ pour tout $n, m \geq N'$, et qu'on pose $M = \max(N, N')$, alors on obtient $d(g_n h_n, g_m h_m) \leq 3\varepsilon$ pour tout $n, m \geq M$. On sait donc que si (g_n) tend vers $g \in \overline{G}$ et (h_n) tend vers $h \in \overline{G}$ alors $(g_n h_n)$ converge dans \overline{G} . Reste à vérifier que cette limite est la même pour d'autres suites (g'_n) et (h'_n) tendant respectivement vers g et h . Le même raisonnement que dans le début de la preuve du théorème s'applique pour montrer qu'on a dans ce cas $d(g_n h_n, g'_n h'_n) \rightarrow 0$ (c'est un bon exercice!).

Il est maintenant facile de vérifier que les opérations de groupe s'étendent continûment à \overline{G} ; de plus D s'étend par définition du complété en une distance compatible complète sur \overline{G} , donc \overline{G} est un groupe polonais si G est séparable. \square

Corollaire 4.6.

Soit G un groupe polonais et d une distance invariante à gauche sur G . Alors la distance D définie par $D(g, h) = d(g, h) + d(g^{-1}, h^{-1})$ est une distance complète engendrant la topologie de G .

Preuve.

Par continuité des opérations de groupe, il est clair que D engendre la topologie de G ; de plus, on a vu que le complété (métrique) de (G, D) est en fait un groupe polonais, dans lequel G est un sous-groupe polonais, dense par définition du complété. Par conséquent (G, D) coïncide avec son complété, autrement dit (G, D) est complet. \square

4.3 Quotients et continuité automatique

Dans cette section, on va s'intéresser aux morphismes entre groupes polonais; avant de comprendre les morphismes, il faut comprendre leurs noyaux, et savoir si on peut former un quotient. Pour cela, on a besoin du résultat suivant.

Théorème 4.7. *Soit G un groupe polonais, et $H \subseteq G$ un sous-groupe fermé. Soit d_l une distance compatible et invariante sur G , et G/H le quotient de G par l'action de H par translation à gauche. On définit une distance d^* sur G/H par*

$$d^*(Hg_1, Hg_2) = \inf (\{d(h_1g_1, h_2g_2) : h_1, h_2 \in H\})$$

Alors d^ est une distance compatible avec la topologie quotient sur G/H .*

Preuve.

Commençons par vérifier que d^* est une distance; il est clair que d^* est symétrique, et facile de vérifier l'inégalité triangulaire. Supposons maintenant qu'on ait $d^*(Hg_1, Hg_2) = 0$. Alors il existe deux suites a_n, b_n d'éléments de H telles que $d(a_ng_1, b_ng_2)$ tend vers 0. Comme d est invariante à gauche, on en déduit que $d(g_2^{-1}b_n^{-1}a_ng_1, 1)$ tend vers 0, autrement dit $g_2^{-1}b_n^{-1}a_ng_1$ tend vers 1. Comme G est un groupe topologique, ceci entraîne que $b_n^{-1}a_n$ (qui est une suite d'éléments de H) converge vers $g_2g_1^{-1}$. On en déduit que $g_2g_1^{-1} \in H$, c'est-à-dire $g_2H = g_1H$.

Montrons maintenant que d induit la topologie quotient sur G/H . Pour cela, notons qu'il suffit de démontrer qu'une suite (Hg_n) converge vers Hg pour la topologie quotient si et seulement si $d^*(Hg_n, Hg) \rightarrow 0$; en effet, les deux topologies sont à base dénombrable de voisinages (la topologie quotient a manifestement une base dénombrable d'ouverts).

Supposons que $d^*(Hg_n, Hg) \rightarrow 0$, et fixons un ouvert V invariant sous l'action de H par translation à gauche et contenant g ; fixons ε tel que $B(g, \varepsilon) \subseteq V$. Il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$ on ait $h_n \in H$ tel que $d(h_ng_n, g) < \varepsilon$, ce dont on déduit successivement $h_ng_n \in V$ puis $g_n \in V$. Par conséquent g_nH tend vers gH pour la topologie quotient.

Réciproquement, si (Hg_n) tend vers Hg pour la topologie quotient, fixons $\varepsilon > 0$ et posons

$$V_\varepsilon = \{Hk : Hk \cap B(g, \varepsilon) \neq \emptyset\}$$

C'est un ouvert pour la topologie quotient, par conséquent il existe N tel que pour tout $n \geq N$ on ait $Hg_n \in V_\varepsilon$, ce qui entraîne $d^*(Hg_n, Hg) < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$ \square

Si H est de plus distingué, on sait maintenant que G/H est un groupe topologique séparable, métrisable, et que G/H est l'image d'un espace polonais par une application ouverte.

Théorème 4.8. *Soit G un groupe polonais et $H \leq G$ un sous-groupe fermé. Le groupe G/H , muni de la topologie quotient, est un groupe polonais. Plus généralement, l'espace des classes à droite modulo un sous-groupe fermé, muni de la topologie quotient, est un espace polonais.*

Pour obtenir ce résultat, il nous reste à prouver que la topologie quotient sur G/H est polonaise; on va se contenter pour le moment d'admettre le théorème suivant..

Théorème 4.9. (Sierpinski) *Soit X un espace polonais, Y un espace métrisable et $f: X \rightarrow Y$ une surjection continue et ouverte. Alors Y est polonais.*

On n'en a pas fini avec les quotients : si on a un morphisme continu surjectif entre groupes polonais $\varphi: G \rightarrow H$, le morphisme obtenu en passant au quotient est-il un isomorphisme de groupes topologiques entre $G/\text{Ker}(\varphi)$ et H ? Il est clair que le morphisme en question est un isomorphisme algébrique continu, mais pourquoi son inverse serait-il continu?

On voudrait donc omprendre comment assurer qu'un morphisme est continu ; faisons un détour par le problème suivant, posé par Cauchy : que peut-on dire des applications $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$? Cauchy savait déjà que si une telle fonction φ est continue en 0 alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La question était de savoir s'il existe des morphismes de groupe de \mathbb{R} non continus.

Aujourd'hui, avec l'axiome du choix, on sait facilement construire des morphismes de $(\mathbb{R}, +)$ qui ne sont pas continus : par exemple, considérons \mathbb{R} comme un espace vectoriel sur \mathbb{Q} , et choisissons un hyperplan $H \subseteq \mathbb{R}$ et une forme \mathbb{Q} -linéaire φ dont le noyau est H . Si φ était continue, alors H serait fermé, et d'intérieur vide sans quoi φ serait nulle partout par linéarité. Mais \mathbb{R} est la réunion disjointe d'un nombre dénombrable de copies de H , donc \mathbb{R} serait maigre, ce qui n'est pas sans poser quelques problèmes.

Un résultat classique de théorie de la mesure entraîne que si un morphisme $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est Lebesgue-mesurable, alors φ est continu en 0; dans la suite, on va prouver un analogue de ce théorème dans le contexte des morphismes Baire-mesurables entre groupes polonais.

Lemme 4.2. (Pettis)

Soit G un groupe polonais. Si $A \subseteq X$ on appelle $U(A)$ le plus grand ouvert dans lequel A est comaigne (i.e la réunion des ouverts dans lesquels A est comaigne).

Alors, si $A, B \subseteq G$ on a $U(A).U(B) \subseteq A.B$.

Preuve.

Notons que, par continuité des opérations de groupe, on a $gU(A) = U(g.A)$ et $U(A)^{-1} = U(A^{-1})$ pour tout $g \in G$ et tout $A \subseteq G$. Plaçons nous maintenant dans le cadre du théorème, fixons $g \in U(A).U(B)$ et posons $V = gU(B)^{-1} \cap U(A) = U(gB^{-1}) \cap U(A)$. C'est un ouvert non vide, et par

définition gB^{-1} et A sont tous les deux comaires dans V ; par conséquent il existe $h \in gB^{-1} \cap A$, ce qui prouve que $g \in A.B$. \square

Ce lemme a en particulier pour conséquence que, si $A \subseteq G$ est Baire-mesurable et non-maigre, alors $A.A^{-1}$ contient un voisinage du neutre de G : en effet, alors $U(A)$ et $U(A^{-1})$ sont tous deux ouverts non vides, donc leur produit est un ouvert contenant 1 et, d'après le lemme de Pettis, cet ouvert est contenu dans $A.A^{-1}$. On va répéter cet argument dans la preuve ci-dessous.

Théorème 4.10. *Soit G, H deux groupes polonais. Alors tout morphisme Baire-mesurable $\varphi: G \rightarrow H$ est continu.*

Preuve.

Il suffit bien sûr de montrer que φ est continu en 1_G ; c'est-à-dire que pour tout V contenant 1_H $\varphi^{-1}(V)$ contient un voisinage de 1_G . Fixons donc un ouvert V contenant 1_H ; par continuité des opérations de groupe on peut trouver W tel que $W.W^{-1} \subseteq V$. Alors $\varphi^{-1}(W)$ est Baire-mesurable et non maigre, par conséquent $U(\varphi^{-1}(W))$ est un ouvert non vide et, d'après le lemme de Pettis :

$$1_H \in U(\varphi^{-1}(W)).U(\varphi^{-1}(W))^{-1} \subseteq \varphi^{-1}(W).(\varphi^{-1}(W))^{-1} \subseteq \varphi^{-1}(W.W^{-1}) \subseteq \varphi^{-1}(V).$$

Donc $\varphi^{-1}(V)$ contient bien 1_H dans son intérieur. \square

Comme toute fonction borélienne est Baire-mesurable, on voit en particulier que tout morphisme borélien entre groupes polonais est continu ; en particulier, si τ_1 et τ_2 sont deux topologies de groupe polonais sur le même groupe G et si τ_1 et τ_2 ont les mêmes boréliens, alors $\tau_1 = \tau_2$.

Exercice 4.11. Soit G un groupe polonais et $H \leq G$ un sous-groupe non maigre et Baire-mesurable. Montrer que H est ouvert-fermé.

4.4 Continuité des opérations de groupe.

Théorème 4.12. *Soit X, Y, Z trois espaces métriques, et $f: X \times Y \rightarrow Z$ une fonction séparablement continue. Alors il existe un ensemble comaire $\Omega \subseteq X \times Y$ tel que f soit continue en tout point de Ω et, pour tout y , Ω^y soit comaire dans X .*

Preuve.

Pour tout $n, k \in \mathbb{N}$, on introduit

$$F_{n,k} = \{ (x, y) : \forall u, v \in B(y, 2^{-k}) [d(f(x, u), f(x, v)) \leq 2^{-n}] \} .$$

Puisque f est séparablement continue, on a

$$X \times Y = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_{n,k}$$

Montrons que chaque $F_{n,k}$ est fermé : si $(x_m, y_m) \in F_{n,k}$ et $(x_m, y_m) \rightarrow (x, y)$, alors pour tout $u, v \in B(y, 2^{-k}[$ il existe un rang M à partir duquel $u, v \in B(y_m, 2^{-k}[$, et par conséquent $d(f(x_m, u), f(x_m, v)) \leq 2^{-n}$. En utilisant la continuité de $x \mapsto f(x, y)$, on obtient en faisant tendre m vers $+\infty$ que $d(f(x, u), f(x, v)) \leq 2^{-n}$.

Alors, introduisons

$$A = \bigcup_{n,k} \{(x, y) : x \in F_{n,k}^y \setminus \text{Int}(F_{n,k}^y)\} .$$

Comme chaque $F_{n,k} \setminus \text{Int}(F_{n,k})$ est maigre, et que A est contenu dans la réunion de ces ensembles, A est maigre. Si l'on pose $\Omega = X \times Y \setminus A$, Ω est comaigne et on voit que Ω^y est comaigne dans X pour tout $y \in Y$; il reste à prouver que f est continue en tout point de Ω .

Fixons donc $(x, y) \in \Omega$ et $\varepsilon > 0$, puis choisissons n tel que $2^{-n} \leq \varepsilon$. Puisque $X = \bigcup F_{n,k}^y$, il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $(x, y) \in F_{n,k}$ et puisque $(x, y) \in \Omega$ on en déduit que $x \in \text{Int}(F_{n,k}^y)$, autrement dit il existe un ouvert $U \subseteq X$ tel que $U \times \{y\} \subseteq F_{n,k}$.

Par continuité de $x \mapsto f(x, y)$, on peut, quitte à réduire U , supposer que pour tout $x' \in U$ on a $d(f(x, y), f(x', y)) \leq \varepsilon$.

Soit alors $(x', y') \in U \times B(y, 2^{-n}[$; on sait que $(x', y) \in F_{n,k}$ et on a donc à la fois $d(f(x, y), f(x', y)) \leq \varepsilon$ et $d(f(x', y), f(x', y')) \leq \varepsilon$.

L'inégalité triangulaire donne donc $d(f(x, y), f(x', y')) \leq 2\varepsilon$ pour tout $(x', y') \in U \times B(y, 2^{-k}[$. \square

Ce théorème est particulièrement intéressant dans le contexte des actions de groupes polonais ; on va établir un résultat sur des groupes plus généraux, dont l'intérêt sera justifié par ses applications.

Théorème 4.13. *Soit G un groupe muni d'une topologie polonaise telle que $h \mapsto gh$ soit continue pour tout $g \in G$. Supposons que X soit un espace métrique et $(g, x) \mapsto g.x$ une action séparablement continue de G sur X . Alors l'action est continue.*

Preuve.

Soit $g_0 \in G$, $x_0 \in X$. D'après le théorème précédent, on sait que $(g, x) \mapsto g.x$ est continue en (g, x_0) pour un ensemble comaigne de g et donc, puisque G

est polonais, il existe h_0 tel que $(g, x) \mapsto g.x$ est continue en (h_0, x_0) .
 Fixons $g_0 \in G$ et $x_0 \in X$; on a, pour tout (g, x) :

$$g.x = (g_0 h_0^{-1}).(h_0 g_0^{-1} g.x) .$$

Quand g tend vers g_0 on a, par continuité de $g \mapsto g_0^{-1}g$, que $h_0 g_0^{-1}g$ tend vers h_0 ; la continuité de $(g, x) \mapsto g.x$ en (h_0, x_0) assure que si (g, x) tend vers (g_0, x_0) alors $h_0 g_0^{-1}g.x$ tend vers $h_0.x_0$. L'action étant séparablement continue, $g.x$ tend vers $g_0.x_0$. \square

Notons qu'on en déduit immédiatement, en considérant l'action de G sur lui-même par translation à gauche, le théorème suivant :

Théorème 4.14. *Si G est un groupe muni d'une topologie polonaise pour laquelle $(g, h) \mapsto g.h$ est séparablement continue et $g \mapsto g^{-1}$ est continue alors G est un groupe polonais.*

On verra plus tard que l'hypothèse sur la continuité de $g \mapsto g^{-1}$ est en fait inutile.

Notes bibliographiques. Ce chapitre s'inspire de [Gao09], qui est une référence accessible et bien dans l'esprit de ce cours. On pourra aussi consulter avec profit [Kec95] et [BK96] pour voir où mènent les définitions présentées dans ce chapitre.

Exercices

Exercice 4.15. Montrer qu'un produit dénombrable de groupes polonais est un groupe polonais.

Exercice 4.16. Soit K un métrique compact. Montrer que $Homeo(K)$, muni de la topologie de la convergence uniforme, est un groupe polonais.
 Soit X un polonais localement compact. En utilisant la compactification d'Alexandrov, montrer que $Homeo(K)$, muni de la topologie compacte-ouverte, est un groupe polonais.

Exercice 4.17. Soit G un groupe polonais et d une distance bi-invariante (c.à.d invariante par translations à droite et à gauche) et compatible avec la topologie de G . Montrer que d est complète. Une telle distance existe-t-elle toujours ?

Exercice 4.18. Soit G un groupe polonais. Montrer que G admet une distance bi-invariante si, et seulement si, il existe une base dénombrable (U_n) de voisinages de 1 telle que $gU_n g^{-1} = U_n$ pour tout g dans G^i .

En déduire qu'il existe une distance invariante par conjugaison compatible avec la topologie de G si, et seulement si, il existe une distance bi-invariante compatible avec la topologie de G .

Exercice 4.19. On admet (ce sera justifié plus tard) que si $f: X \rightarrow Y$ est une fonction borélienne *injective* entre les polonais X et Y , alors l'image de tout borélien de X est borélien dans Y . Montrer alors le théorème suivant : Soit G, H deux groupes polonais et φ un morphisme continu et surjectif de G sur H . Alors φ passe au quotient en un isomorphisme (de groupes topologiques) de $G/\text{Ker}(\varphi)$ sur H .

i. Indication : reprendre la preuve du théorème de Birkhoff-Kakutani...

Chapitre 5

Ensembles boréliens, analytiques, coanalytiques

5.1 Schémas et théorèmes de transfert

Définition 5.1. Soit X un espace topologique. On dit que $x \in X$ est un *point isolé* si $\{x\}$ est ouvert dans X , et X est dit *parfait* si X n'a pas de points isolés.

On dit que $x \in X$ est un *point de condensation* si tout ouvert contenant x est non dénombrable.

Théorème 5.2. (Cantor-Bendixson) *Soit X un espace polonais. Alors X s'écrit de manière unique $X = P \cup D$, où P est parfait et D est ouvert dénombrable.*

Preuve.

Définissons $P = X^* = \{x \in X : x \text{ est un point de condensation}\}$, $D = X \setminus P$. Fixons une base dénombrable (U_n) d'ouverts de X ; on voit que D est la réunion des U_n qui sont dénombrables. Donc D est ouvert et dénombrable. De plus, si $x \in P$, alors tout ouvert contenant x est non dénombrable, donc contient un élément qui n'appartient pas à D . Ceci prouve qu'aucun élément de P n'est isolé, et donc P est parfait.

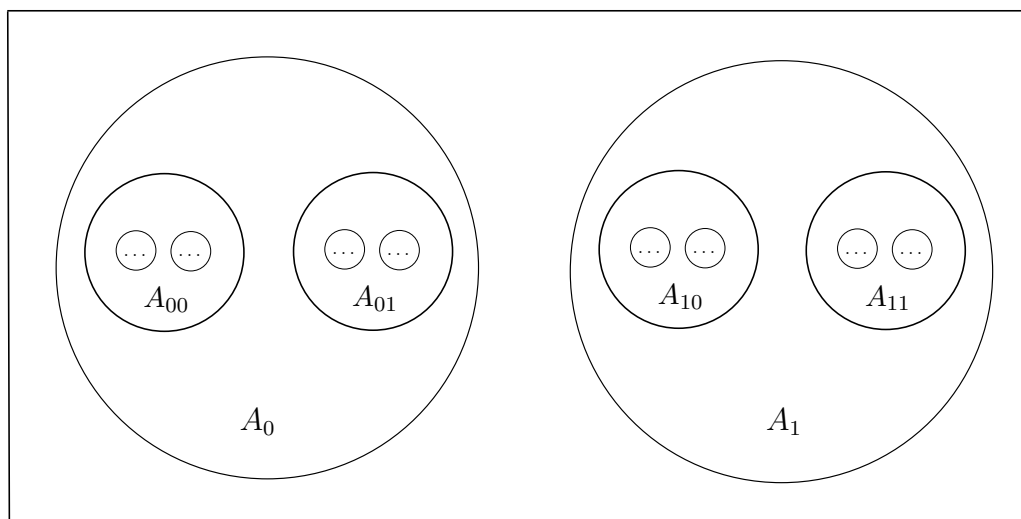
Pour voir que la décomposition est unique, notons que si un polonais Y a un ouvert U dénombrable, alors U s'écrit comme une réunion dénombrable de singletons, qui sont fermés. D'après le théorème de Baire, U contient un singleton ouvert, autrement dit un point isolé. Par conséquent si P est un polonais parfait alors tous les ouverts de P sont non dénombrables, ce qui permet de voir que $P = P^*$. Soit alors $X = P_1 \cup D_1$ une décomposition comme dans l'énoncé du théorème; on a $X^* = P = P_1$, ce qui permet de

conclure. □

On a déjà dit que les espaces de Baire et de Cantor étaient fréquemment utilisés pour établir les théorèmes de théorie descriptive ; dans cette section, on va maintenant expliquer l'outil qui permet de passer de résultats établis pour l'espace de Baire ou de Cantor à des résultats valides pour tous les espaces polonais : ce sont les *schémas*.

Définition 5.3. Un *schéma de Cantor* sur un ensemble X est une famille $(F_s)_{s \in 2^{<\mathbb{N}}}$ de sous-ensembles non vides de X tels que :

- (a) $F_{s \smallfrown 0} \cap F_{s \smallfrown 1} = \emptyset$ pour tout $s \in 2^{<\mathbb{N}}$.
- (b) $\overline{F_{s \smallfrown i}} \subseteq F_s$ pour tout $s \in 2^{<\mathbb{N}}$ et tout $i \in \{0, 1\}$.
- (c) $\text{diam}(F_{x \upharpoonright n}) \rightarrow 0$ pour tout $x \in 2^{\mathbb{N}}$.



Début d'un schéma de Cantor

Comme leur nom l'indique, ces schémas sont très utiles pour travailler avec l'ensemble de Cantor. Par exemple :

Théorème 5.4. Soit X un espace polonais parfait et non vide. Alors il existe une injection continue de \mathcal{C} dans X .

Remarquons, avant de prouver ce théorème, qu'on en déduit que tout polonais parfait est de cardinal supérieur à 2^{\aleph_0} , et donc de cardinal égal à 2^{\aleph_0} . En utilisant le théorème de Cantor-Bendixson, on obtient qu'un espace polonais est soit au plus dénombrable soit de cardinal 2^{\aleph_0} , autrement dit l'hypothèse

du continu est "vraie pour les polonais".

Preuve.

Soit d une distance complète sur X ; on peut construire un schéma de Cantor (U_s) sur X tel que U_s soit ouvert, non vide, et de diamètre $\leq 2^{-|s|}$ pour tout s (remarquons que dans un espace parfait tout ouvert est parfait !). Alors on peut utiliser le schéma pour définir une injection de \mathcal{C} dans X en définissant

$$\{f(x)\} = \bigcap U_{x|_n} .$$

Cette fonction est bien définie puisque l'intersection d'une suite décroissante de fermés dont le diamètre tend vers 0 est un singleton. Pour voir que f est continue, il suffit de remarquer que si $x, y \in \mathcal{C}$ ont leurs n premières coordonnées égales alors $d(f(x), f(y)) \leq 2^{-n}$. \square

Théorème 5.5. (Brouwer) *Soit K un espace compact métrisable, parfait, non vide et zéro-dimensionnel. Alors K est homéomorphe à l'espace de Cantor (et réciproquement, \mathcal{C} a bien ces propriétés !)*

Preuve.

Soit K un espace comme dans l'énoncé du théorème. Alors on peut construire par récurrence un schéma de Cantor $(K_s)_{s \in 2^{\mathbb{N}}}$ tel que

- $K_\emptyset = K$.
- K_s est ouvert-fermé pour tout s .
- $K_s = K_{s-0} \cup K_{s-1}$.

C'est un bon exercice de se convaincre que tout ce dont on a besoin pour pouvoir effectuer cette construction, c'est la propriété suivante : étant donné un ouvert-fermé non vide $U \subseteq K$ et $\varepsilon > 0$, il existe $n > 1$ et des ouverts-fermés non vides U_1, \dots, U_n de diamètre $\leq \varepsilon$ et dont la réunion est égale à U .

La propriété ci-dessus est une conséquence du fait que, comme U est parfait et 0-dimensionnel, tout ouvert-fermé non vide est la réunion de ses ouverts-fermés de diamètre $\leq \varepsilon$, et en est donc une réunion finie par compacité.

On laisse en exercice le fait de justifier précisément la construction du schéma ; une fois celui-ci construit, on peut, pour tout $x \in \mathcal{C}$, définir $f(x)$ par $\{f(x)\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_{x|_n}$. Les conditions sur le schéma assurent que f est bijective et continue. Donc K est homéomorphe à \mathcal{C} . \square

Pour étudier l'espace de Baire, on utilise une notion de schéma adaptée :

Définition 5.6. Un schéma de *Lusin* sur un ensemble X est une famille $(F_s)_{s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ de sous-ensembles (éventuellement vides) de X tels que :

(a) $F_{s-i} \cap F_{s-j} = \emptyset$ pour tout $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ et tout $i \neq j \in \mathbb{N}$.

(b) $F_{s-i} \subseteq F_s$ pour tout $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ et tout $i \in \mathbb{N}$.

On dit que le schéma est *convergent* s'il satisfait de plus :

(b') $\overline{F_{s-i}} \subseteq F_s$ pour tout $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ et tout $i \in \mathbb{N}$.

(c) $\text{diam}(F_{x_{|n}}) \rightarrow 0$ pour tout $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Etant donné un schéma de Lusin convergent (F_s) , notons

$$D = \{x \in \mathcal{N} : \forall n F_{x_{|n}} \neq \emptyset\} .$$

Cet ensemble est fermé, et on peut définir une fonction $f: D \rightarrow X$ en posant

$$\{f(x)\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_{x_{|n}} .$$

Cette fonction est continue, et la définition d'un schéma impose de plus que f est injective.

A l'aide d'un schéma de Lusin, on peut établir le résultat suivant :

Théorème 5.7. *Soit X un espace polonais. Alors il existe un fermé de \mathcal{N} et une bijection continue $f: F \rightarrow X$. Par conséquent, il existe une surjection continue de \mathcal{N} sur X .*

Preuve.

Etant donné ce qu'on a dit plus haut sur les schémas de Lusin, il suffit de prouver qu'on peut construire un schéma de Lusin convergent (F_s) satisfaisant de plus $F_\emptyset = X$ et, pour tout $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$:

$$F_s = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_{s-n} .$$

Pour assurer la condition (b) de la définition d'un schéma de Lusin, il serait agréable de travailler avec des fermés; malheureusement, il n'est en général pas possible de construire un fermé d'un polonais comme réunion dénombrable de "petits" fermés, comme le montre par exemple le cas de \mathbb{R} .

On va donc construire notre schéma avec des ensembles F_σ , et pour cela il suffit de prouver qu'étant donné un $F_\sigma F \subseteq X$ et $\varepsilon > 0$ on peut écrire $F = \bigsqcup F_i$, où chaque F_i est un F_σ (éventuellement vide) de diamètre $\leq \varepsilon$ et tel que $\overline{F_i} \subseteq F$.

Commençons par expliquer comment gérer la condition (c) : fixons une suite

(x_i) dense dans F , et posons $B_i = B(x_i, \varepsilon] \cap F$. Chaque B_i est F_σ , de diamètre $\leq \varepsilon$, et si on pose

$$C_i = B_i \setminus \bigcup_{j < i} B_j$$

alors on a écrit F comme une réunion disjointe de F_σ de diamètre $\leq \varepsilon$. Pour assurer en même temps la condition (b) et la condition (c), commençons par écrire $F = \bigcup A_n$, où chaque A_n est fermé. Puis posons

$$B_n = A_n \setminus \bigcup_{i < n} A_i .$$

Alors chaque B_n est F_σ , les B_n sont disjoints et recouvrent F , et de plus

$$\overline{B_n} \subseteq \overline{A_n} = A_n \subseteq F .$$

On sait que chaque B_n peut s'écrire comme une réunion dénombrable de F_σ disjoints $C_{n,i}$, où chaque $C_{n,i}$ est de plus de diamètre $\leq \varepsilon$. On a alors

$$F = \bigcup_{n,i \in \mathbb{N}} C_{n,i} .$$

Les $C_{n,i}$ remplissent toutes les conditions recherchées, ce qui termine la preuve du théorème. \square

De même que pour l'espace de Cantor, on peut obtenir à l'aide de schémas une caractérisation topologique de l'espace de Baire : c'est, à homéomorphisme près, l'unique espace polonais zéro-dimensionnel dont tous les compacts sont d'intérieur vide.

5.2 La tribu borélienne

Définition 5.8. Rappelons qu'un sous-ensemble A d'un espace topologique X est un *borélien* si A appartient à la σ -algèbre engendrée par les ouverts de X .

Ces ensembles sont fondamentaux en théorie descriptive ; ce sont ceux qu'on peut "définir" à partir des ouverts en utilisant un nombre (au plus) dénombrable de fois les opérations d'union/intersection dénombrable et de passage au complémentaire. Remarquons qu'avec les ordinaux, on peut décrire le nombre de telles opérations qui est nécessaire pour définir A ; ceci amène à définir la *hiérarchie borélienne* .

Définition 5.9.

Soit X un espace topologique. On définit par récurrence transfinie des familles $\Sigma_\xi^0(X)$ et $\Pi_\xi^0(X)$ (indexées par les ordinaux compris entre 1 et ω_1) de sous-ensembles de X en posant :

1. $\Sigma_1^0(X) = \{O \subseteq X : O \text{ est ouvert}\}$;
2. $\Pi_\xi^0(X) = \{B \subseteq X : X \setminus B \in \Sigma_\xi^0(X)\}$;
3. $\Sigma_{\xi+1}^0 = \{B \subseteq X : B = \cup_{i \in \mathbb{N}} A_i, \text{ avec } A_i \in \Pi_\xi^0(X) \text{ pour tout } i\}$;
4. Si $\xi = \sup\{\lambda < \xi\}$ alors $\Sigma_\xi^0(X) = \bigcup_{\lambda < \xi} \Sigma_\lambda^0(X)$.

Par exemple, $\Sigma_2^0(X)$ est l'ensemble des F_σ de X , tandis que Π_2^0 est l'ensemble des G_δ de X . En regardant la définition, on voit que la famille $\bigcup_{\xi < \omega_1} \Sigma_\xi^0(X) = \bigcup_{\xi < \omega_1} \Pi_\xi^0(X)$ contient les ouverts, est contenue dans toute σ -algèbre contenant ceux-ci et est-elle même une σ -algèbre. On obtient donc le résultat suivant.

Théorème 5.10. *Soit X un espace topologique. Alors une partie $A \subseteq X$ est borélienne si, et seulement si, il existe $\xi < \omega_1$ tel que $A \in \Sigma_\xi^0(X)$.*

Rappelons que, par définition, tout borélien a la propriété de Baire et toute fonction borélienne entre espaces topologiques est Baire-mesurable.

A propos de fonction borélienne, notons tout de suite la propriété suivante :

Proposition 5.11. *Soit X un espace topologique, et Y un espace topologique à base dénombrable d'ouverts. Si $f : X \rightarrow Y$ est borélienne, alors son graphe est borélien.*

Preuve.

Fixons une base $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ouverts de Y . Alors, notons qu'on a, pour tout $x \in X$ et tout $y \in Y$:

$$(f(x) = y) \Leftrightarrow (\forall n \ y \in V_n \Rightarrow f(x) \in V_n)$$

Autrement dit, le graphe de f , noté Γ_f , satisfait

$$\Gamma_f = \bigcap_n (X \times (Y \setminus V_n) \cup f^{-1}(V_n) \times V_n)$$

Comme f est par hypothèse borélienne, l'égalité ci-dessus montre que Γ_f est borélien dans $X \times Y$ □

On a déjà dit qu'on ne s'intéressait pas vraiment dans ces notes aux espaces topologiques généraux, mais plutôt aux espaces polonais ; on verra plus tard que dans ce cadre une fonction est borélienne si, et seulement si, son graphe est borélien.

Avant de pouvoir dégager les propriétés fondamentales des fonctions boréliennes entre espaces polonais, il nous faut étudier les *ensembles* boréliens ; les résultats fondamentaux à leur sujet sont basés sur des méthodes de *raffinement de topologies*.

5.3 Raffinement de topologies polonaises

Le but de cette section sera d'établir le théorème suivant, et d'exposer quelques-uns de ses corollaires.

Théorème 5.12. *Soit (X, τ) un espace polonais. Alors pour tout borélien $B \subseteq X$ il existe une topologie polonaise plus fine τ_B sur X telle que B est ouvert-fermé par rapport à τ_B et, de plus, τ et τ_B ont les mêmes boréliens.*

Pour prouver ce théorème, on appelle \mathcal{A} l'ensemble des parties de X satisfaisant la conclusion du théorème. Il est clair que \mathcal{A} est stable par passage au complémentaire. On va montrer que \mathcal{A} est une σ -algèbre qui contient les ouverts.

Commençons par expliquer pourquoi \mathcal{A} contient les fermés ; soit donc F un fermé de X . Il existe une distance complète d_0 engendrant la topologie de F , et une distance complète d_1 engendrant la topologie de $O = X \setminus F$. On peut sans perte de généralité supposer que d_0, d_1 sont bornées par 1. Alors, on peut définir une distance d sur X en posant

$$d(x, y) = \begin{cases} d_0(x, y) & \text{si } (x, y) \in F^2 \\ d_1(x, y) & \text{si } (x, y) \in O^2 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

On vérifie facilement que la topologie engendrée par d est polonaise, et F est ouvert-fermé pour cette topologie. De plus, si τ désigne la topologie de X , la topologie définie par d est engendrée par $\tau \cup \{F\}$ et a en donc les mêmes boréliens que τ .

Expliquons maintenant pourquoi \mathcal{A} est stable par union dénombrable. Commençons par démontrer le lemme suivant.

Lemme 5.1.

Soit X un ensemble, τ une topologie polonaise sur X et $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de

topologies polonaises sur X telles que $\tau \subseteq \tau_n$ pour tout n , et $\mathcal{B}(\tau_n) = \mathcal{B}(\tau)$. Alors la topologie τ_∞ engendrée par $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tau_n$ est une topologie polonaise, et $\mathcal{B}(\tau_\infty) = \mathcal{B}(\tau)$.

Preuve.

Notons X_n l'espace X muni de la topologie τ_n , et considérons $Y = \prod X_n$. Alors Y est polonais.

Maintenant, définissons une fonction $\Phi: (X, \tau_\infty) \rightarrow Y$ en posant $\Phi(x) = (x, x, \dots, x, \dots)$. Par définition de τ_∞ , cette fonction est un homéomorphisme sur son image. On va prouver que $\Phi(X)$ est fermé dans Y , ce qui suffira à établir le lemme.

Soit donc $(x_n) \in Y \setminus \Phi(X)$; il existe n tel que $x_n \neq x_1$. Mais alors, il existe deux τ -ouverts U, V tels que $x_1 \in U$, $x_n \in V$ et $U \cap V = \emptyset$. Ces deux ensembles sont ouverts à la fois pour τ_1 et τ_n , par conséquent $\{(y_n) \in Y : y_1 \in U \text{ et } y_n \in V\}$ est ouvert dans Y ; cet ouvert contient (x_n) et est disjoint de $\Phi(X)$. □_{lemme}

Notons que $\mathcal{B}(\tau_\infty)$ est engendré par $\bigcup \tau_n$; pour chaque n , τ_n a une base dénombrable d'ouverts $V_{n,m}$, qui sont tous τ -boréliens. La σ -algèbre engendrée par les $V_{n,m}$ est égale à $\mathcal{B}(\tau_\infty)$, ce qui prouve que $\mathcal{B}(\tau_\infty) = \mathcal{B}(\tau)$.

Soit maintenant (A_n) une suite d'ensembles de \mathcal{A} . On peut produire une suite de topologies polonaises τ_n , contenant τ et ayant les mêmes boréliens, telles que A_n est ouvert-fermé pour τ_n ; le lemme ci-dessus nous donne une topologie polonaise τ_∞ , contenant τ et avec les mêmes boréliens, pour laquelle $A = \bigcup A_n$ est ouvert. Il existe donc une topologie polonaise ayant les mêmes boréliens que τ et pour laquelle A est ouvert-fermé. □

On voit donc que tout borélien peut être rendu ouvert-fermé, quitte à affiner la topologie, mais en ne touchant pas à la tribu borélienne; on verra plus tard qu'il s'agit-là d'une caractérisation des boréliens.

Corollaire 5.13. Soit X un polonais. L'hypothèse du continu est vraie pour les boréliens de X .

Remarquons qu'on peut utiliser les lemmes précédents pour montrer que, pour tout polonais X et toute famille dénombrable de boréliens de X , il existe une topologie polonaise sur X , ayant les mêmes boréliens que la topologie de départ, pour laquelle tous les membres de la famille sont ouverts-fermés. Ceci permet d'obtenir le corollaire suivant.

Corollaire 5.14.

Soit (X, τ_X) un polonais, (Y, τ_Y) un espace à base dénombrable d'ouverts et

$f: X \rightarrow Y$ une fonction borélienne. Alors il existe une topologie polonaise τ' sur X qui raffine τ_X , a les mêmes boréliens, et pour laquelle f est continue.

Preuve.

Soit (V_n) une base d'ouverts de Y ; on peut simultanément rendre ouverts-fermés tous les $f^{-1}(V_n)$. \square

Concluons cette section par un dernier théorème, qui nous ramène aux origines de la théorie descriptive des ensembles.

Corollaire 5.15. Soit X un polonais. Tout borélien de X est image continue injective d'un fermé de \mathcal{N} .

Preuve.

Soit (X, τ) un polonais et $B \subseteq X$ un borélien. Il existe une topologie τ' raffinant la topologie de X pour laquelle B est ouvert-fermé, et donc (B, τ') est polonais ; alors on sait qu'il existe un fermé $F \subseteq \mathcal{N}$ et une bijection continue $f: F \rightarrow B$. Alors f , vue comme une fonction de F dans (X, τ) , est continue, injective, et $f(F) = B$. \square

5.4 Ensembles analytiques ; le théorème de séparation

On a vu dans la section précédente que tout borélien d'un polonais X peut s'écrire comme l'image d'une certaine fonction continue $f: \mathcal{N} \rightarrow X$. Mais l'image de \mathcal{N} par une fonction continue est-elle un borélien ? Plus généralement, si $B \subseteq X$ est borélien, $f: X \rightarrow Y$ est une fonction continue entre espaces polonais, alors $f(B)$ est-il borélien dans Y ?

Définition 5.16.

Soit X un espace polonais. Une partie $A \subseteq X$ est dite *analytique* s'il existe un polonais Y et une application continue $f: Y \rightarrow X$ telle que $A = f(Y)$.

Une partie est dite *coanalytique* si son complémentaire est analytique.

Notons que dans la définition ci-dessus on pourrait se contenter de considérer $Y = \mathcal{N}$.

Notons tout de suite que tout borélien est analytique ; si X, Y sont polonais, $A \subseteq X$ est analytique et $f: X \rightarrow Y$ est continue alors $f(A)$ est analytique ; en fait c'est encore vrai si l'on suppose simplement f définie (et continue) sur A , grâce au théorème de Kuratowski.

Exercice 5.17. Soit X un polonais, et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensembles analytiques de X . Montrer que $\bigcup A_n$ et $\bigcap A_n$ sont analytiques.

Notons que si $f: Y \rightarrow X$ est continue alors son graphe Γ_f est fermé dans $Y \times X$; la projection de Γ_f sur la deuxième coordonnée est $f(Y)$. Par conséquent, si $A \subseteq X$ est analytique alors il existe un polonais Y et un fermé $F \subseteq Y \times X$ tels que $A = \pi_X(F)$, où π_X désigne la projection sur X .

On sait que $Y = g(\mathcal{N})$, où g est une fonction continue; on peut alors considérer

$$B = \{(\alpha, x) \in \mathcal{N} \times X : (g(\alpha), x) \in F\}$$

Cet ensemble est fermé dans $\mathcal{N} \times X$, et sa projection sur X est égale à $f(X)$. Par conséquent, tout analytique de X est la projection d'un fermé de $\mathcal{N} \times X$.

Théorème 5.18.

Soit X un espace polonais non dénombrable. Alors il existe une partie $A \subseteq X$ qui est analytique mais pas borélienne.

Ce théorème est en fait une conséquence, dans notre contexte, du paradoxe du barbier. Notons déjà qu'il suffit de le prouver pour $X = \mathcal{N}$ (tout polonais non dénombrable contient un G_δ homéomorphe à \mathcal{N}). On va utiliser la notion d'ensemble *universel* pour une classe donnée.

Définition 5.19. Soit Γ une des classes d'ensembles qu'on a introduite jusqu'à présent (ouverts, boréliens, analytiques, Π_ξ^0 ...) et X un polonais.

Une partie $A \subseteq \mathcal{N} \times X$ est *universelle* pour la classe $\Gamma(X)$ si $A \in \Gamma(\mathcal{N} \times X)$ et, pour tout $B \in \Gamma(X)$, il existe $x \in \mathcal{N}$ tel que $B = A_x$.

Théorème 5.20. *Il existe un ensemble universel pour $\Sigma_1^1(\mathcal{N})$.*

On peut voir qu'un tel ensemble est nécessairement non borélien : si A était borélien, l'ensemble $B = \{x : (x, x) \notin A\}$ serait aussi borélien, donc il devrait exister x_0 tel que $A_{x_0} = B$. Alors $x_0 \in B \Leftrightarrow (x_0, x_0) \in A \Leftrightarrow x_0 \notin B$.

Par conséquent le théorème 5.20 entraîne qu'il existe un sous-ensemble analytique non borélien dans \mathcal{N}^2 , qui est homéomorphe à \mathcal{N} .

Preuve du théorème 5.20

Commençons par montrer qu'il existe un ensemble universel pour $\Sigma_1^0(\mathcal{N})$: étant donnée une base d'ouverts (V_n) de \mathcal{N} , on peut considérer

$$A = \{(x, y) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} : y \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_{x(n)}\}$$

On voit facilement que A est ouvert dans \mathcal{N}^2 , et comme tout ouvert est réunion dénombrable d'un sous-ensemble de $\{U_n\}$, A est universel.

5.4. ENSEMBLES ANALYTIQUES ; LE THÉORÈME DE SÉPARATION 71

Par conséquent, il existe aussi (en considérant le complémentaire de A) un ensemble Π_1^0 -universel.

Pour finir la preuve du théorème, il nous suffit de coder la caractérisation d'un analytique de \mathcal{N} comme projection d'un fermé de $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$.

Commençons par prendre un fermé $P \in \mathcal{N} \times \mathcal{N}^2$ tel que pour tout fermé $F \subseteq \mathcal{N}^2$ il existe $y \in \mathcal{N}$ tel que $F = P_y$; ensuite définissons

$$A = \{(x, y) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} : \exists z (x, y, z) \in P\}$$

Cet ensemble est analytique; de plus, si $B \subseteq \mathcal{N}$ est analytique, alors B est la projection d'un fermé F_B , pour lequel on sait par universalité de P qu'il existe $x \in \mathcal{N}$ tel que

$$\forall y, z (y, z) \in F_B \Leftrightarrow (x, y, z) \in P .$$

Mais alors on voit que

$$b \in B \Leftrightarrow \exists y (b, y) \in F_B \Leftrightarrow \exists y (x, b, y) \in P \Leftrightarrow b \in A_x .$$

Ceci conclut la preuve du théorème. □

Théorème 5.21. *Soit A et B deux sous-ensembles analytiques disjoints d'un espace polonais X . Il existe un borélien C de X tel que $A \subseteq C$ et $B \cap C = \emptyset$.*

Preuve.

Dans cette preuve on dira que deux parties $A, B \subseteq X$ sont *séparables* s'il existe un borélien C tel que $A \subseteq C$ et $B \cap C = \emptyset$.

Lemme 5.2. *Soient $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de parties telles que A_n et B_m sont séparables pour tout n, m . Alors $\bigcup A_n$ et $\bigcup B_n$ sont séparables.*

Preuve du lemme : Choisissons pour toute paire (n, m) un borélien $C_{n,m}$ tel que $A_n \subseteq C_{n,m}$ et $B_m \cap C_{n,m} = \emptyset$. Posons

$$C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \in \mathbb{N}} C_{n,m} .$$

Alors C est borélien, $\bigcup A_n \subseteq C$ et $\bigcup B_n \cap C = \emptyset$. □_{lemme}

Maintenant, fixons deux surjections continues $f: \mathcal{N} \rightarrow A$ et $g: \mathcal{N} \rightarrow B$. En reprenant les notations habituelles, on a, pour toute suite finie $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, que

$$f(N_s) = \bigcup_n f(N_{s \frown n}) \text{ et } g(N_s) = \bigcup_n g(N_{s \frown n}) .$$

Supposons que A et B ne peuvent pas être séparés.

Alors, en utilisant l'égalité ci-dessus ainsi que le lemme précédent, on peut construire par récurrence $x, y \in \mathcal{N}$ tel que pour tout n $f(N_{x|n})$ et $g(N_{y|n})$ ne peuvent pas être séparés. Mais ceci est impossible : en effet, $f(x) \neq g(y)$, donc il existe deux ouverts U, V d'intersection vide et tels que $f(x) \in U$, $g(y) \in V$. Par continuité de f et g en x et y , ces deux ouverts montrent que pour n assez grand $f(N_{x|n})$ et $g(N_{y|n})$ peuvent être séparés. \square

En considérant la paire $(A, X \setminus A)$ on obtient une caractérisation fondamentale des boréliens.

Corollaire 5.22. Un sous-ensemble A de X est borélien si, et seulement si, A est à la fois analytique et coanalytique.

On peut maintenant caractériser les fonctions boréliennes entre polonais par leur graphe.

Théorème 5.23. Soit X, Y deux espaces polonais et $f: X \rightarrow Y$ une fonction. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est borélienne.
- (ii) Le graphe de f est un sous-ensemble borélien de $X \times Y$.
- (iii) Le graphe de f est un sous-ensemble analytique de $X \times Y$.

Preuve.

Il est clair que (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii). Supposons maintenant que f satisfasse (iii), et soit U un ouvert de Y . Alors on a

$$x \in f^{-1}(U) \Leftrightarrow \exists y \in Y ((x, y) \in \Gamma_f \text{ et } y \in U) .$$

Ceci permet de voir que $f^{-1}(U)$ est analytique, puisque c'est la projection d'un ensemble analytique de $X \times Y$.

Par ailleurs, on a

$$x \in f^{-1}(U) \Leftrightarrow \forall y \in Y ((x, y) \in \Gamma_f \Rightarrow y \in U)$$

Autrement dit,

$$x \notin f^{-1}(U) \Leftrightarrow \exists y \in Y ((x, y) \in \Gamma_f \text{ et } y \notin U)$$

Ainsi, le complémentaire de $f^{-1}(U)$ est lui aussi analytique dans X , et ceci n'est possible que si $f^{-1}(U)$ est borélien. \square

Corollaire 5.24. Si τ, τ' sont deux topologies polonaises sur un même ensemble X telles que $\tau \subseteq \tau'$, alors τ et τ' ont les mêmes boréliens.

Exercice 5.25. Soit G un groupe polonais pour deux topologies τ, τ' . Montrer que si $\tau \subseteq \tau'$ alors $\tau = \tau'$.

Une application aux groupes polonais.

On a déjà vu que la topologie de la convergence simple (notons-la τ dans la suite) définissait une structure de groupe polonais sur \mathcal{S}_∞ . Soit maintenant τ' une autre topologie de groupe polonais sur \mathcal{S}_∞ . On va montrer qu'alors $\tau' = \tau$, ce qui prouvera qu'il existe une *unique* topologie de groupe polonais sur \mathcal{S}_∞ ; par conséquent, cette structure polonaise est en fait "codée" par la structure algébrique. Ce phénomène est lié à des propriétés de continuité automatique étendant ce qu'on a vu au chapitre 3.

Pour montrer que $\tau' = \tau$, il suffit de montrer que $id: (\mathcal{S}_\infty, \tau') \rightarrow (\mathcal{S}_\infty, \tau)$ est borélienne, et pour cela il suffit (grâce à la structure de groupe) de prouver que tout τ -voisinage ouvert de 1 est τ' -borélien. En fait, il suffit même de montrer cela pour une base d'ouverts contenant 1; une telle base est donnée par les ensembles de la forme $V_n = \{\sigma: \forall i \leq n \sigma(i) = i\}$.

Fixons maintenant $n \in \mathbb{N}$, et notons $A_n = \{\sigma: \forall i > n \sigma(i) = i\}$. On vérifie facilement que

$$\sigma \in V_n \Leftrightarrow \forall \sigma' \in A_n \sigma \circ \sigma' = \sigma' \circ \sigma .$$

Notons que la condition de droite est une condition τ' -fermée puisque $(\mathcal{S}_\infty, \tau')$ est un groupe topologique. Par conséquent, pour tout n V_n est τ' -fermé, ce qui prouve que $id: \tau' \rightarrow \tau$ est un isomorphisme borélien, et donc est un isomorphisme de groupes polonais (par continuité automatique).

5.5 Boréliens standard ; fonctions boréliennes

On a vu que l'image continue d'un borélien n'est pas nécessairement un borélien; qu'en est-il si l'on suppose de plus l'application injective?

Théorème 5.26. Soit X, Y deux polonais, $f: X \rightarrow Y$ une fonction borélienne injective et $A \subseteq X$ un borélien. Alors $f(A)$ est borélien dans Y . De plus $f^{-1}: A \rightarrow Y$ est borélienne.

Avant de démontrer ce résultat, notons qu'il fournit la pièce qui nous manquait pour finir de justifier les propriétés des quotients de groupes polonais.

Preuve.

Notons que, si l'on sait prouver que la première phrase est vraie, alors on obtient facilement que f^{-1} est borélienne.

Passons maintenant à la preuve du premier énoncé ; quitte à raffiner la topologie de X on peut supposer que A est fermé dans X , et que f est continue. Tout fermé de X étant l'image continue bijective d'un fermé de \mathcal{N} , on peut finalement supposer que $X = \mathcal{N}$.

Reprenons les notations usuelles relatives à la topologie de \mathcal{N} , et posons, pour tout $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$:

$$B_s = f(A \cap N_s) .$$

Comme f est injective, les B_s forment un schéma de Lusin, et chaque B_s est analytique. En utilisant le théorème de séparation des ensembles analytiques, on peut construire un schéma de Lusin (B_s^*) tel que chaque B_s^* soit borélien et $B_s \subseteq B_s^* \subseteq \overline{B_s}$ pour tout s .

On va maintenant montrer, par double inclusion, que

$$f(A) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{s \in \mathbb{N}^k} B_s^* .$$

Ceci permettra de conclure que $f(A)$ est borélien dans Y .

$f(A) \subseteq \bigcap_k \bigcup_{s \in \mathbb{N}^k} B_s^*$:

Si $x = f(a)$ pour un certain $a \in A$, alors on a, pour tout k , $x \in f(A \cap N_{a|_k})$, et donc $x \in B_{a|_k}$, par conséquent $x \in \bigcup_{s \in \mathbb{N}^k} B_s^*$.

$\bigcap_k \bigcup_{s \in \mathbb{N}^k} B_s^* \subseteq f(A)$:

Si $x \in \bigcap_k \bigcup_{s \in \mathbb{N}^k} B_s^*$, alors il existe un unique $a \in \mathcal{N}$ tel que, si l'on note $s_k = a|_k$, on ait pour tout k que $x \in B_{s_k}^*$. Par conséquent, on a pour tout k que $x \in \overline{B_{s_k}}$. Si jamais $f(a) \neq x$, alors il existe des ouverts U, V disjoints tels que $f(a) \in U$, $x \in V$. Par continuité de f en a on a, pour k suffisamment grand :

$$f(N_{s_k} \cap A) \subseteq U .$$

Par conséquent pour k suffisamment grand $B_{s_k} \cap V = \emptyset$, et donc $x \notin \overline{B_{s_k}}$, ce qui est absurde. \square

Maintenant, intéressons-nous à la tribu borélienne d'un espace polonais ; c'est, comme on va le voir, un objet canonique, dans un sens très fort ; c'est sans doute l'objet qu'on rencontre le plus souvent en analyse.

Théorème 5.27. *Soit X, Y deux espaces polonais tels qu'il existe une injection borélienne $f: X \rightarrow Y$ et une injection borélienne $g: Y \rightarrow X$. Alors il existe une bijection borélienne de X sur Y .*

Preuve.

La preuve qu'on a donnée du théorème de Schröder-Bernstein dans le premier chapitre s'adapte parfaitement ici.

Tout d'abord, notons que si X, Y sont deux polonais et $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$ sont des injections boréliennes, alors on a $X \supseteq g(Y) \supseteq g \circ f(X)$, et $X, g(Y), g \circ f(X)$ sont tous trois boréliens (puisque une image borélienne injective de borélien est borélien).

Il suffit donc, comme dans le cas "classique", de montrer que si X est polonais, $Y \subseteq X$ est borélien et il existe une injection borélienne $f: X \rightarrow X$ telle que $f(X) \subseteq Y$ alors il existe une bijection borélienne $f: X \rightarrow Y$.

Pour conclure, il suffit de regarder la suite de la preuve du théorème de Schröder-Bernstein et de s'assurer que la fonction ainsi construite est bien borélienne (ce qu'on laisse comme un exercice simple mais instructif). \square

Corollaire 5.28. Si X et Y sont deux polonais de même cardinal, alors il existe une bijection borélienne de X sur Y .

Preuve.

Si X, Y sont au plus dénombrables il n'y a rien de nouveau à montrer (toutes les fonctions sont boréliennes, puisque les singletons sont fermés!).

Supposons maintenant que X est un polonais non dénombrable. On a vu qu'il existe une injection continue de \mathcal{C} dans X . Le problème est maintenant de trouver une injection dans l'autre sens. Mais on sait qu'il existe une bijection continue d'un fermé de \mathcal{N} dans X , et par conséquent une injection borélienne de X dans \mathcal{N} , dont on a vu qu'il était homéomorphe à un sous-ensemble de \mathcal{C} . Par conséquent il existe une bijection borélienne de \mathcal{C} sur X . \square

Définition 5.29.

Soit (X, \mathcal{B}) un espace mesuré. On dit que X est un *borélien standard* si X est isomorphe à un espace polonais (muni de sa tribu borélienne).

Notes bibliographiques. Ce chapitre s'inspire de [Kec95] et [Sri98].

Exercices

Exercice 5.30. (*Alexandrov-Urysohn*)

Montrer que l'espace de Baire est, à homéomorphisme près, l'unique espace polonais zéro-dimensionnel dont tous les compacts sont d'intérieur vide.ⁱ

i. il s'agit de construire un schéma de Lusin, en utilisant (et démontrant) le fait que tout ouvert-fermé d'un espace vérifiant les conditions du théorème peut s'écrire comme une réunion dénombrable d'ouvert-fermés de petit diamètre.

Exercice 5.31. Montrer que \mathbb{Q} est, à homéomorphisme près, l'unique espace métrisable, parfait, dénombrable et non vide.

Montrer que tout espace métrique dénombrable est homéomorphe à un fermé de \mathbb{Q} .

Exercice 5.32. Soit X un espace polonais parfait, et $\mathbb{Q} \subseteq X$ une partie dénombrable et dense. Montrer que \mathbb{Q} est F_σ mais pas G_δ .

Exercice 5.33. 1. Soit X un espace métrique séparable et infini. On appelle \mathcal{O} l'ensemble dont les éléments sont les ouverts de X . Montrer que le cardinal de \mathcal{O} est égal à 2^{\aleph_0} .

2. Soit X un polonais non dénombrable. On appelle \mathcal{F} l'ensemble dont les éléments sont les fermés non dénombrables de X . Montrer que le cardinal de \mathcal{F} est égal à 2^{\aleph_0} .

Exercice 5.34. Soit X un polonais et (A_n) une suite de sous-ensembles analytiques de X deux à deux disjoints. Montrer qu'il existe une famille de sous-ensembles boréliens (B_n) de X deux à deux disjoints et tels que $A_n \subseteq B_n$ pour tout n .

Exercice 5.35. Soit X, Y deux polonais et $A \subseteq X, B \subseteq Y$ deux boréliens. Montrer qu'il existe une bijection borélienne $f: X \rightarrow Y$ telle que $f(A) = B$ si, et seulement si, $|A| = |B|$ et $|X \setminus A| = |X \setminus B|$.

Exercice 5.36. Soit G, H deux groupes polonais et $\varphi: G \rightarrow H$ un morphisme borélien. Montrer que $\varphi(G)$ est borélien dans H .

Application : en utilisant le théorème de Pettis, montrer que si φ est surjectif alors φ est une application ouverte, i.e $\varphi(U)$ est ouvert pour tout ouvert $U \subseteq G$.

Exercice 5.37. En généralisant les théorèmes de Kuratowski et Laverentiev au cadre des espaces boréliens, prouver qu'un espace mesuré (X, \mathcal{B}) est borélien standard ssi il est borélien dans son complété ssi il est homéomorphe à un borélien d'un polonais.

Chapitre 6

Actions de groupes polonais et relations d'équivalence

Dans ce dernier chapitre, on va s'intéresser aux actions boréliennes de groupes polonais sur des boréliens standard ; en particulier, on va dégager une propriété élémentaire des orbites d'une telle relation et s'intéresser à l'ensemble quotient. Ensuite, on va établir un résultat de combinatoire infinie, dit « théorème de \mathcal{G}_0 -dichotomie » et dû à Kechris, Solecki et Todorcevic, avant d'appliquer ce résultat pour obtenir une preuve du théorème de Lusin-Novikov et du théorème de Silver sur le cardinal du quotient d'un espace polonais par une relation d'équivalence coanalytique.

6.1 Préliminaires

Pour commencer, il nous faut expliquer comment mettre une structure de borélien standard sur l'ensemble des fermés d'un polonais X ; et encore avant cela, nous devons rappeler des propriétés élémentaires de la topologie de Vietoris sur l'ensemble des compacts d'un polonais X . Dans toute la suite de cette section, X désigne un espace polonais et d une distance complète sur X .

Définition 6.1. On note $\mathcal{K}(X)$ l'ensemble des compacts de X . On munit $\mathcal{K}(X)$ de la *topologie de Vietoris*, dont une base d'ouverts est donnée par les ensembles de la forme

$$\{K \in \mathcal{K}(X) : K \subseteq U \text{ et } K \cap U_1 \neq \emptyset \dots \text{ et } K \cap U_n \neq \emptyset\}$$

où U, U_1, \dots, U_n sont des ouverts de X .

Cette topologie est induite par la *distance de Hausdorff* sur $\mathcal{K}(X)$, caractérisée

par la relation suivante :

$$\forall K, L \in \mathcal{K}(X) \quad (d_H(K, L) \leq \varepsilon) \Leftrightarrow (K \subseteq L_\varepsilon \text{ et } L \subseteq K_\varepsilon)$$

avec $K_\varepsilon = \{x \in X : d(x, K) \leq \varepsilon\}$

On rappelle maintenant, sans démonstration, des propriétés élémentaires de $\mathcal{K}(X)$, dont le lecteur intéressé pourra trouver une preuve dans son livre de topologie préféré ou dans [Kec95].

- $\mathcal{K}(X)$ est séparable (si D est une partie dénombrable dense de X alors l'ensemble des parties finies de D , qui est dénombrable, est dense dans $\mathcal{K}(X)$).
- d_H est complète ; en particulier $\mathcal{K}(X)$ est un espace polonais.
- Si X est compact alors $\mathcal{K}(X)$ est compact.
- Les fonctions $(K, L) \mapsto K \cup L$ et $(K, L) \mapsto K \cap L$ sont toutes deux boréliennes.

On utilisera également dans la suite le lemme suivant :

Lemme 6.1. *La structure borélienne de $\mathcal{K}(X)$ est engendrée par les ensembles de la forme $\{K : K \cap U \neq \emptyset\}$, où U parcourt l'ensemble des ouverts de X .*

Preuve.

Etant donnée la définition de la topologie de Vietoris, il suffit de prouver que les ensembles de la forme $\{K : K \subseteq O\}$ appartiennent à la tribu engendrée par les parties de la forme $\{K : K \cap U \neq \emptyset\}$. Pour cela, fixons un ouvert O , notons F son complémentaire et introduisons

$$U_n = \{x \in X : d(x, F) < \frac{1}{n}\} .$$

Notons que la distance d'un compact et d'un fermé disjoints est nécessairement strictement positive ; par conséquent, on a

$$\{K : K \subseteq O\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{K : K \cap U_n = \emptyset\}$$

L'ensemble de droite est bien sûr dans la tribu qui nous intéresse, ce qui finit la preuve. ■

Définition 6.2. On désigne par $\mathcal{F}(X)$ l'ensemble des fermés de X . On le munit de la tribu engendrée par les ensembles de la forme

$$\{F \in \mathcal{F}(X) : F \cap U \neq \emptyset\}$$

où U parcourt l'ensemble des ouverts de X . On appelle cette structure la *structure borélienne d'Effros*.

L'intérêt de cette structure est qu'elle fait de $\mathcal{F}(X)$ un borélien standard, ce qui nous permettra d'appliquer les techniques de théorie descriptive à des applications d'un polonais dans l'ensemble des fermés d'un autre polonais, par exemple.

Théorème 6.3. *L'ensemble $\mathcal{F}(X)$, muni de la structure borélienne d'Effros, est un borélien standard.*

Preuve.

On utilise le fait qu'il existe une compactification métrique (K, δ) de X , i.e un compact métrique dans lequel X est dense. Attention, la distance δ restreinte à X n'est bien sûr pas complète! Si on fixe un tel compact K , alors on peut considérer l'application $\Phi: \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{K}(K)$ définie par

$$\Phi(F) = \overline{F} .$$

L'adhérence dans la formule ci-dessus est bien sûr prise dans K ; par exemple, $\Phi(X) = K$. Alors on voit que

$$\Phi(\mathcal{F}(X)) = \{L \in \mathcal{K}(K) : L \cap X \text{ est dense dans } L\} .$$

D'autre part, on vérifie facilement que Φ est un isomorphisme mesurable de $\mathcal{F}(X)$, muni de la structure borélienne d'Effros, sur $\Phi(\mathcal{F}(X))$ muni de la structure borélienne induite par la topologie de $\mathcal{K}(K)$. Pour prouver notre théorème, il nous faut donc simplement montrer que $\Phi(\mathcal{F}(X))$ est borélien dans $\mathcal{K}(K)$.

Pour cela, notons que comme X est polonais il doit être G_δ dans K , par conséquent il existe une suite dénombrable d'ouverts U_n de K , denses puisque X est dense dans K , tels que $X = \bigcap U_n$. Fixons une base (V_n) de la topologie de X . Alors, pour tout compact $L \subseteq K$, on a grâce au théorème de Baire

$$(L \cap X \text{ est dense dans } L) \Leftrightarrow (\forall n \ L \cap U_n \text{ est dense dans } L) .$$

A partir de cette seconde formulation, on voit donc que

$$(L \cap X \text{ est dense dans } L) \Leftrightarrow (\forall n \forall m (L \cap V_m \neq \emptyset \Rightarrow (L \cap U_n \cap V_m \neq \emptyset))) .$$

La formule de droite définit manifestement un borélien de $\mathcal{K}(K)$, par conséquent $\Phi(\mathcal{F}(X))$ est borélien dans $\mathcal{K}(K)$, ce qui achève la démonstration. ■

Notons qu'il est facile de montrer que $(F, F') \mapsto F \cup F'$ est borélienne; par contre, en général $(F, F') \mapsto F \cap F'$ n'est pas une fonction borélienne...

L'intérêt de la structure borélienne d'Effros est le théorème suivant, dû à Kuratowski et Ryll-Nardzewski :

Théorème 6.4. *Soit X un polonais, et $\mathcal{F}(X)$ l'ensemble des fermés de X muni de la structure borélienne d'Effros. Alors il existe une suite de fonctions boréliennes $d_n: \mathcal{F}(X) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow X$ telles que pour tout fermé F non vide de X l'ensemble $\{d_n(F)\}_{n < \omega}$ soit dense dans F .*

Preuve.

On peut bien sûr supposer X infini. On va commencer par construire une fonction borélienne $s: \mathcal{F}(X) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow X$ telle que pour tout fermé non vide de X on ait $s(F) \in F$.

Pour cela, commençons par noter qu'il est possible de construire une famille d'ouverts (U_s) indexée par les suites finies d'entiers et tels que

1. $U_\emptyset = X$, chaque U_s est ouvert non vide ;
2. $U_s = \cup U_{s \frown i}$ pour tout s , et $\overline{U_{s \frown i}} \subseteq U_s$ pour tout suite finie s et tout entier i ;
3. $\text{diam}(U_s) \rightarrow 0$ quand $|s|$ tend vers ∞ .

Alors ce schéma permet de définir une surjection ouverte $f: \mathcal{N} \rightarrow F$. Maintenant, considérons l'ensemble des branches infinies de l'arbre sur \mathbb{N} associé à un fermé F non vide, c'est-à-dire l'ensemble

$$\mathcal{S}_F = \{\alpha \in \mathcal{N} : \forall n \ U_{\alpha|n} \cap F \neq \emptyset\} .$$

Cet ensemble est fermé ; introduisons l'ordre *lexicographique* sur \mathcal{N} défini par

$$(\alpha \leq_{lex} \beta) \Leftrightarrow (\alpha = \beta \text{ ou } \exists n \ \alpha|n = \beta|n \text{ et } \alpha(n) < \beta(n))$$

Il est facile de vérifier que tout fermé de \mathcal{N} non vide a un plus petit élément pour \leq_{lex} ; alors, pour tout fermé F non vide on peut définir α_F comme le plus petit élément de \mathcal{S}_F , puis poser $s(F) = f(\alpha_F)$.

Par définition, on a bien $s(F) \in F$, et pour montrer que s est borélienne il suffit de prouver que $F \mapsto \alpha_F$ est borélienne, c'est-à-dire prouver que son graphe est borélien. En notant encore \leq_{lex} l'ordre lexicographique sur \mathbb{N}^n , on a pour tout $\alpha \in \mathcal{N}$ et tout fermé F de X :

$$(\alpha = \alpha_F) \Leftrightarrow \left(\forall n \ ((\forall s \in \mathbb{N}^n \ s <_{lex} \alpha|n \Rightarrow U_s \cap F = \emptyset) \text{ et } (U_{\alpha|n} \cap F \neq \emptyset)) \right) .$$

On vérifie, à partir de la définition de la structure borélienne d'Effros et du fait que les U_s sont ouverts, que l'ensemble des (α, F) tels que $\alpha = \alpha_F$ est borélien dans $\mathcal{N} \times \mathcal{F}(X)$, par suite l'application $F \mapsto \alpha_F$ est borélienne et donc d aussi.

Pour construire une suite de fonctions boréliennes (d_n) comme dans l'énoncé du théorème, il suffit de fixer une base d'ouverts (V_n) de X et de remarquer

que la construction précédente nous permet de trouver pour tout n une fonction borélienne $d_n: \mathcal{F}(X) \rightarrow X$ telle que $d_n(F) \in F \cap V_n$ dès que ce dernier ensemble est non vide. ■

6.2 Actions, orbites, stabilisateurs

On va maintenant présenter quelques résultats élémentaires sur les actions boréliennes de groupes polonais. Avant cela, donnons quelques exemples : le premier est l'action de \mathbb{Q} (muni de la topologie discrète) sur \mathbb{R} par translation à gauche. Il est bien connu que l'on ne peut pas construire de sous-ensemble borélien T qui rencontre chaque orbite en un et un seul point. Autrement dit, la structure quotient de \mathbb{R} par cette action est déjà relativement compliquée. Il est fréquent en mathématiques de rencontrer des relations d'équivalence qu'on souhaite classifier, c'est-à-dire qu'on souhaite trouver des invariants qui permettent de caractériser quand deux éléments sont équivalents pour cette relation. Un exemple typique est la relation d'isomorphisme entre structures, par ex. des groupes, des corps, des espaces métriques... Beaucoup de relations d'équivalence qu'on a envie de considérer se trouvent pouvoir être codées comme des relations provenant d'une action borélienne d'un groupe polonais ; on est donc particulièrement intéressé par ces relations.

Un exemple particulièrement important : soit \mathcal{L} un langage relationnel dénombrable ; notons R_i chaque relation du langage \mathcal{L} , et appelons k_i l'arité de R_i . On veut s'intéresser aux \mathcal{L} -structures infinies dénombrables ; sans perte de généralité, on peut imposer que l'univers d'une telle \mathcal{L} -structure soit \mathbb{N} . Mais alors, chaque relation R_i se trouve être interprétée comme une partie de \mathbb{N}^{k_i} , c'est-à-dire un élément de $2^{\mathbb{N}^{k_i}}$. Finalement, on voit qu'on peut identifier l'ensemble des \mathcal{L} -structures dénombrables d'univers \mathbb{N} à l'ensemble

$$X_{\mathcal{L}} = \prod_{i \in I} 2^{\mathbb{N}^{k_i}} .$$

Examinons maintenant la relation d'isomorphisme : deux \mathcal{L} structures dénombrables, d'univers \mathbb{N} , sont isomorphes si, et seulement si, il existe une bijection $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ qui préserve les relations. Définissons, pour chaque $i \in I$, une action de \mathcal{S}_{∞} sur $2^{\mathbb{N}^{k_i}}$ en posant

$$(\sigma.R)(x_1, \dots, x_{k_i}) \Leftrightarrow (R(\sigma^{-1}(x_1), \dots, \sigma^{-1}(x_{k_i}))) .$$

Alors on obtient une action continue de \mathcal{S}_{∞} sur le compact $X_{\mathcal{L}}$, et la relation d'isomorphisme entre \mathcal{L} -structures dénombrables est exactement la relation

induite par cette action.

Si on va un peu plus loin, et qu'on veut considérer la relation d'isomorphisme entre modèles dénombrables d'une théorie T dans le langage \mathcal{L} , il suffit de remarquer que l'ensemble des modèles de T d'univers \mathbb{N} est un borélien de $X_{\mathcal{L}}$, stable pour l'action de \mathcal{S}_{∞} . Autrement dit, la relation d'isomorphisme entre modèles dénombrables de T apparaît comme la relation associée à une action borélienne de \mathcal{S}_{∞} sur un borélien standard.

En théorie des modèles, la *conjecture de Vaught* est l'énoncé suivant :

Soit \mathcal{L} un langage relationnel dénombrable, T une théorie dans ce langage et κ le cardinal de l'ensemble des modèles de T à isomorphisme près. Alors $\kappa \leq \aleph_0$ ou $\kappa = 2^{\aleph_0}$.

Evidemment, cette conjecture est une conséquence immédiate de l'hypothèse du continu, et est donc consistante avec (ZF) et (ZFC) ; on ne sait pas s'il s'agit d'un théorème... Du coup on peut avoir envie de chercher à établir (ou infirmer) une conjecture plus forte, la *conjecture de Vaught topologique*, qui est l'énoncé suivant :

Soit X un polonais, G un groupe polonais agissant boréliennement sur X et E_G la relation d'équivalence associée. Alors soit X/E est dénombrable soit il existe un ensemble parfait dans X dont les éléments sont deux à deux non E_G -équivalents.

Il est bien clair que la conjecture de Vaught topologique est plus forte que la conjecture de Vaught ; en fait, pour montrer la conjecture de Vaught, il suffirait de montrer la conjecture de Vaught topologique simplement pour le groupe \mathcal{S}_{∞} . C'est un problème ouvert célèbre et vraisemblablement difficile. Le meilleur résultat connu à ce jour, dû à Becker, est que tout groupe polonais cli satisfait la conjecture de Vaught topologique.

Après cette parenthèse, revenons à nos moutons, ou plutôt à nos relations. Le cas idéal pour une relation serait que le quotient, avec la topologie quotient, soit un borélien standard. Cela correspond à la définition suivante.

Définition 6.5. Soit G un groupe polonais agissant boréliennement sur le polonais X , et E_G la relation associée. On dit que E_G a un *sélecteur borélien* s'il existe une fonction borélienne $s: X \rightarrow X$ qui soit à la fois G -invariante et telle que pour tout x on ait $s(x)E_G x$ (alors la fonction s sélectionne boréliennement un élément dans chaque E_G -classe).

On dit que $T \subseteq X$ est une *transversale* pour E_G si, et seulement si, T rencontre chaque E_G -classe en un unique point.

Exercice 6.6. Soit G un groupe polonais agissant boréliennement sur le polonais X . Montrer que E_G a un sélecteur borélien si, et seulement si, E_G

a une transversale borélienne.

(A titre de remarque, cette équivalence n'est pas vraie si E est simplement une relation d'équivalence borélienne ne provenant pas d'une action de groupe polonais)

Un exemple important est donné par le théorème suivant.

Théorème 6.7. *Soit G un groupe polonais, H un sous-groupe fermé de G et E_H la relation associée à l'action de H sur G par translation à droite (la relation dont les classes sont les gH). Alors il existe une transversale borélienne pour E_H .*

Preuve. Il suffit de construire un sélecteur borélien s , car cette application passera au quotient en une injection borélienne du polonais G/H à valeurs dans G , dont l'image est une transversale borélienne pour l'action de H sur G par translation à droite.

Et pour cela, il nous suffit de montrer que l'application $\Phi: G \rightarrow \mathcal{F}(G)$ définie par $\Phi(g) = gH$ est borélienne : en effet, si on considère une fonction borélienne $d: \mathcal{F}(X) \rightarrow X$ telle que $d(F) \in F$ pour tout fermé non vide, alors $d \circ \Phi$ est un sélecteur borélien pour E_H .

Pour montrer que Φ est borélienne, il nous faut regarder l'image réciproque d'un générateur de la structure borélienne d'Effros, et voir si c'est un borélien ; autrement dit on doit montrer que pour tout ouvert U de G l'ensemble

$$\{g \in G: gH \cap U \neq \emptyset\}$$

est borélien. Comme $gH \cap U \neq \emptyset \Leftrightarrow g \in U.H$ et que l'ensemble $U.H$ est ouvert, on a gagné. ■

Notons que la relation E_G associée à l'action de G sur X est analytique dans X^2 , puisque

$$(x, y) \in E_G \Leftrightarrow \exists g \in G (g.x = y) .$$

En général, cette relation n'est pas borélienne. Par contre, on peut montrer que les classes d'équivalence de E_G sont toujours boréliennes.

Théorème 6.8. *(Miller)*

Soit X un espace polonais, G un groupe polonais agissant boréliennement sur X . Alors pour tout $x \in X$ le stabilisateur G_x de x est fermé dans G , et l'orbite de x est borélienne dans X .

Preuve. Il suffit de montrer que le stabilisateur G_x est fermé pour tout x : en effet, l'application borélienne $g \mapsto g.x$ passe au quotient en une injection borélienne du polonais G/G_x dans X , donc son image est borélienne, et cette

image est bien sûr l'orbite de x .

Fixons donc $x \in X$, et essayons de montrer que son stabilisateur est fermé ; sans perte de généralité, on peut supposer G_x dense dans G . Alors, si on montre que G_x est non maigre on saura grâce au théorème de Pettis (et au fait que G_x est borélien donc Baire-mesurable) que G_x est ouvert, donc (c'est un sous-groupe) fermé, ce qu'on voulait démontrer.

Raisonnons par l'absurde et supposons que G_x est maigre (rappelons qu'on suppose G_x dense dans G). Comme G_x est dense dans G , son action sur G par translation à droite est topologiquement transitive et donc tout ensemble à la fois G_x -invariant (pour l'action par translation à droite) et Baire-mesurable est soit maigre soit comeaigre.

Fixons maintenant une base d'ouverts (U_n) pour la topologie de X , et définissons

$$A_n = \{g \in G : g.x \in U_n\}$$

Il est clair que A_n est borélien et G_x -invariant, par suite chaque A_n est soit maigre soit comeaigre. De plus, on peut se convaincre que pour tout $g \in G$ on a

$$gG_x = \bigcap_{\{n: g \in A_n\}} A_n .$$

Comme G_x est maigre, chaque gG_x est maigre aussi et par conséquent tout $g \in G$ doit être contenu dans un A_n qui est maigre (sinon $g.G_x$ serait une intersection dénombrable de parties comeaigres, absurde). Par conséquent, on a

$$G = \bigcup_{\{n: A_n \text{ maigre}\}} A_n .$$

Mais alors G est maigre, et c'est bien sûr interdit par le théorème de Baire. ■

6.3 Bref retour sur les ensembles analytiques et Baire-mesurables.

Avant de présenter le théorème de Kechris, Solecki, Todorcevic, on va revenir sur des propriétés fondamentales des ensembles analytiques. Commençons par une propriété élémentaire qui aurait dû être énoncée beaucoup plus tôt.

Lemme 6.2. *Soit X, Y deux polonais, $f: X \rightarrow Y$ une fonction continue et A une partie analytique (resp. coanalytique) de Y . Alors $f^{-1}(A)$ est analytique (resp. coanalytique).*

Preuve. Bien sûr, il suffit de montrer le résultat concernant une partie analytique. Soit donc A une partie analytique de X ; si l'on note Γ le graphe de f , alors Γ est borélien et $f^{-1}(A)$ est la projection sur X de $\Gamma \cap (X \times A)$, en particulier c'est l'image continue d'un borélien du polonais $X \times Y$ et donc $f^{-1}(A)$ est analytique. ■

Dans cette section, on veut établir le théorème de Nikodym selon lequel toute partie analytique d'un polonais X est Baire-mesurable (et donc toute partie coanalytique, ou même toute partie dans la σ -algèbre engendrée par les parties analytiques, est Baire-mesurable). Nos théorèmes de transfert permettent de voir qu'il suffit de prouver ce résultat dans le cas où $X = \mathcal{C}$.

Avant cela, un petit lemme pour nous mettre en appétit.

Lemme 6.3. *Soit $A \subseteq \mathcal{C}$ une partie quelconque. Alors il existe un borélien $B \subseteq 2^\omega$ tel que $A \subseteq B$ et tout sous-ensemble Baire-mesurable de $B \setminus A$ soit maigre.*

Attention, on n'a pas prouvé pour autant que $B \setminus A$ est Baire-mesurable, bien sûr !

Preuve. Introduisons l'ensemble

$$S = \{s \in 2^{<\omega} : A \text{ est maigre dans } N_s\} .$$

Pour tout $s \in S$, fixons une suite $(U_{n,s})_{n < \omega}$ d'ouverts denses de N_s dont l'intersection est disjointe de A , et appelons B le complémentaire de

$$B' = \bigcup_{s \in S} \bigcap_n U_{n,s} .$$

Alors il est clair que B' est disjoint de A , borélien, et donc que B est borélien et contient A . Par ailleurs, si $C \subseteq B \setminus A$ est non-maigre et Baire-mesurable, alors C est comaigne dans un certain N_s , ce qui entraîne que A est maigre dans N_s , mais alors $s \in S$ et donc C , qui est disjoint de $\bigcap_n U_{n,s}$, est maigre dans N_s . Ceci contredit bien sûr le fait que N_s est un ouvert d'un polonais, donc C doit en fait être maigre. ■

En fait, on vient de prouver que tout ensemble $A \subseteq 2^\omega$ a une *enveloppe* pour la tribu des parties Baire-mesurables, c'est-à-dire une partie B qui contient A , a la propriété de Baire, et est telle que pour toute B' avec ces deux propriétés on ait $B \setminus B'$ maigre. L'existence d'une telle enveloppe est ce qui permet de montrer qu'une partie analytique est Baire-mesurable ; de même, on pourrait montrer que pour toute mesure borélienne σ -finie sur 2^ω il existe une enveloppe (pour la tribu des parties mesurables, identifiées à mesure

nulle près) et déduire que toute partie analytique A de 2^ω est mesurable pour toutes les mesures boréliennes σ -finies. On dit que les parties analytiques sont *universellement mesurables* ; on ne va pas en dire plus ici puisqu'on n'a pas parlé de théorie de la mesure (même si elle va encore pointer son nez dans la section suivante). Venons-en au théorème de Nikodym.

Théorème 6.9. *Soit A une partie analytique de 2^ω . Alors A est Baire-mesurable.*

Preuve. On sait qu'il existe une application continue $f: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$ telle que $A = f(\mathcal{N})$. Notons $A_s = f(N_s)$; par le lemme précédent, il existe pour tout $s \in 2^{<\omega}$ un borélien B_s de \mathcal{C} tel que $A_s \subseteq B_s$ et tout sous-ensemble de $B_s \setminus A_s$ avec la propriété de Baire soit maigre. Définissons un borélien

$$C_s = B_s \cap \overline{A_s} .$$

Alors, on a

$$A = \bigcup_{x \in \mathcal{N}} \bigcap_{n < \omega} B_{x|n} .$$

Notons que

$$C_s \setminus \bigcup_{n < \omega} C_{s \smallfrown n} \subseteq C_s \setminus \bigcup_{n < \omega} f(N_{s \smallfrown n}) \subseteq C_s \setminus f(N_s) .$$

En particulier, $C_s \setminus \bigcup_n C_{s \smallfrown n}$ est maigre, et donc

$$M = \bigcup_{s \in \omega^{<\omega}} (C_s \setminus \bigcup_n C_{s \smallfrown n})$$

est maigre. Finalement, définissons

$$C = \bigcap_{n < \omega} \bigcup_{s \in \omega^n} C_s .$$

Alors $C \setminus A$ est contenu dans M et est donc maigre ; de plus C est borélien, ce dont on déduit au final que A est Baire-mesurable. ■

6.4 \mathcal{G}_0 -dichotomie : applications.

On va maintenant conclure ces notes en présentant un théorème récent, dû à Kechris, Solecki et Todorcevic et appelé *théorème de \mathcal{G}_0 -dichotomie*, et en discutant certaines de ses applications. La preuve qu'on présente ci-dessous est due à Ben Miller et évite l'utilisation de la « théorie descriptive effective ». Définissons quelques notions de combinatoire infinie.

Définition 6.10. Soit X un ensemble. Un *graphe* sur X est une relation binaire symétrique et irréflexive \mathcal{G} sur X . Si X est polonais alors on dit que \mathcal{G} est un graphe borélien (resp. analytique) si \mathcal{G} est un borélien (resp. analytique) de X^2 .

Si A est une partie de X et \mathcal{G} un graphe sur X , alors on définit la restriction de \mathcal{G} à A , notée $\mathcal{G}|_A$, par la formule

$$\mathcal{G}|_A = \mathcal{G} \cap (A \times A) .$$

Un *morphisme* entre les graphes \mathcal{G} sur X et \mathcal{H} sur Y est une application $\varphi: X \rightarrow Y$ telle que

$$\forall x, x' \in X \quad (x, x') \in \mathcal{G} \Rightarrow (\varphi(x), \varphi(x')) \in \mathcal{H} .$$

Comme en combinatoire finie, on s'intéresse aux coloriage de graphes ; il y aurait beaucoup à dire, mais ici on va simplement s'intéresser aux coloriage boréliens à ω couleurs de graphes analytiques.

Définition 6.11. Soit X un ensemble, \mathcal{G} un graphe sur X et A une partie de X . On dit que A est *\mathcal{G} -discrète* si $\mathcal{G} \cap (A \times A) = \emptyset$, autrement dit si $\mathcal{G}|_A = \emptyset$. Un *coloriage* à ω couleurs est une fonction $c: X \rightarrow \omega$ telle que pour tout $i < \omega$ $c^{-1}(\{i\})$ soit \mathcal{G} -discrète (i.e deux voisins dans le graphe se voient attribuer des couleurs différentes).

Notons dès maintenant que si φ est un morphisme borélien d'un graphe \mathcal{G} (sur le polonais X) dans le graphe \mathcal{H} (sur le polonais Y) et \mathcal{H} admet un ω -coloriage borélien c alors $c \circ \varphi$ est un ω -coloriage borélien de \mathcal{G} .

Avant de pouvoir présenter le théorème de \mathcal{G}_0 -dichotomie, il nous faut définir le graphe \mathcal{G}_0 .

Définition 6.12. Fixons un sous-ensemble $I \subseteq 2^{<\omega}$ avec les deux propriétés suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N} \exists ! s \in I \ |s| = n ;$
2. $\forall s \in 2^{<\omega} \exists t \in I \ s \subseteq t .$

Alors on définit un graphe \mathcal{G}_0 sur 2^ω en définissant :

$$(\alpha \mathcal{G}_0 \beta) \Leftrightarrow (\exists s \in I \exists x \in 2^\omega \exists i \in \{0, 1\} \alpha = s \frown i \frown x \text{ et } \beta = s \frown (1-i) \frown x) .$$

Notons tout de suite que ce graphe est borélien dans $2^\omega \times 2^\omega$ (l'expression ci-dessus semble dire que ce graphe est analytique - à vous de trouver une formule borélienne!).

Une propriété fondamentale de ce graphe est la suivante :

Lemme 6.4. *Soit $A \subseteq 2^\omega$ une partie Baire-mesurable et non maigre. Alors A n'est pas \mathcal{G}_0 -discrète.*

Preuve. Soit A comme dans l'énoncé. On sait qu'il existe un ouvert non vide dans lequel A est comaigne, donc il existe $t \in 2^{<\omega}$ tel que A soit comaigne dans N_t . De plus t est contenu dans une suite finie s qui appartient à I , et A est toujours comaigne dans N_s . Alors, posons $|s| = n$ et considérons l'application φ qui remplace la n -ième coordonnée i d'une suite par $1 - i$ et ne touche pas aux autres coordonnées. C'est bien sûr un homéomorphisme qui fixe N_t , par conséquent A et $\varphi(A)$ sont tous deux comaignes dans N_s , et donc $A \cap \varphi(A) \cap N_s$ est non vide. Ceci signifie qu'il existe $x \in 2^\omega$ tel que $s \frown 0 \frown x$ et $s \frown 1 \frown x$ appartiennent toutes deux à A . Mais alors, puisque $(s \frown 0 \frown x, s \frown 1 \frown x) \in \mathcal{G}_0$, on voit que A n'est pas \mathcal{G}_0 -discrète. ■

En particulier, on voit que \mathcal{G}_0 n'admet pas de ω -coloriage borélien : si $c: 2^\omega \rightarrow \omega$ est borélienne alors un des $c^{-1}(\{i\})$ est non maigre, et tous les $c^{-1}(\{i\})$ son boréliens donc Baire-mesurables ; par conséquent un des $c^{-1}(\{i\})$ n'est pas \mathcal{G}_0 -discret.

Quel est le rapport entre \mathcal{G}_0 et les relations d'équivalence ? Considérons la relation d'équivalence *engendrée par \mathcal{G}_0* , c'est-à-dire la plus petite relation d'équivalence sur 2^ω qui contienne \mathcal{G}_0 . Deux suites sont équivalentes pour cette relation si, et seulement si, il existe un chemin qui les relie et dont toutes les arêtes sont dans \mathcal{G}_0 . A l'aide des deux propriétés de l'ensemble I utilisées pour définir \mathcal{G}_0 , on voit à l'aide d'un raisonnement par récurrence que deux suites α, β sont équivalentes pour cette relation si, et seulement si :

$$\exists n \in \omega \forall m \geq n \alpha(m) = \beta(m) .$$

On note cette relation d'équivalence E_0 . Cette relation d'équivalence est la version combinatoire de la relation de Vitali sur \mathbb{R} définie par

$$(x \sim y) \Leftrightarrow (x - y \in \mathbb{Q})$$

Ici aussi, il y a un groupe induisant la relation d'équivalence : c'est le groupe \mathcal{Q} des suites à support fini dans $2^{<\omega}$, qui agit sur 2^ω par addition coordonnée par coordonnée. Si on note μ la mesure de Haar sur 2^ω (i.e la mesure produit des mesures sur $\{0, 1\}$ pour lesquelles 0 et 1 ont tous deux un poids égal à $1/2$) alors il est facile de vérifier que μ est \mathcal{Q} -invariante et que la relation E_0 est μ -ergodique, i.e un sous-ensemble de 2^ω invariant est nécessairement de mesure 0 ou 1.

En particulier, si $f: 2^\omega \rightarrow X$ est une fonction borélienne de 2^ω dans un polonais X qui est constante sur les E_0 -classes alors f doit en fait être constante

μ -presque partout (consultez votre livre de théorie ergodique favori ; si vous n'en avez pas, je conseille le livre de Halmos...). Donc une fonction continue et E_0 -invariante doit en fait être constante. On utilisera plus tard ce résultat sous la forme suivante.

Lemme 6.5. *Soit X un polonais, et $f: 2^\omega \rightarrow X$ une fonction continue telle que*

$$\forall \alpha, \beta \in 2^\omega \quad \alpha \mathcal{G}_0 \beta \Rightarrow f(\alpha) = f(\beta) .$$

Alors f est constante.

Énonçons maintenant le théorème de Kechris, Solecki et Todorcevic, avant d'en présenter quelques corollaires.

Théorème 6.13. *Soit X un polonais et \mathcal{G} un graphe analytique sur X . Alors un et un seul des deux énoncés suivants est vrai :*

- \mathcal{G} admet un ω -coloriage borélien ;
- Il existe un morphisme continu de \mathcal{G}_0 dans \mathcal{G} .

On discutera plus tard la preuve (compliquée!) de cet élégant théorème. Notons d'ores et déjà que les deux propriétés ci-dessus sont bien mutuellement exclusives, puisqu'on a vu que \mathcal{G}_0 n'admet pas de ω -coloriage borélien.

Commençons par pointer quelques applications du théorème de \mathcal{G}_0 -dichotomie ; on l'applique en général en conjonction avec le théorème de Kuratowski-Ulam et le théorème de Mycielski (vu lors du partiel et redémontré dans la section suivante), comme dans l'exercice suivant.

Exercice 6.14. Utiliser le théorème de \mathcal{G}_0 -dichotomie pour prouver le fait qu'une partie analytique d'un polonais X est soit au plus dénombrable soit de cardinal 2^{\aleph_0} .

Evidemment, on sait montrer ce théorème sans utiliser le théorème de \mathcal{G}_0 -dichotomie. Le théorème suivant, dit théorème de Lusin-Novikov, est déjà nettement plus compliqué.

Théorème 6.15. *Soit X, Y deux polonais et $A \subseteq X \times Y$ un borélien à sections verticales dénombrables. Alors A est une réunion dénombrable de graphes boréliens, i.e de parties boréliennes de $X \times Y$ qui sont des graphes de fonctions à domaine (nécessairement borélien) contenu dans X et à valeurs dans Y .*

Preuve. Introduisons un graphe \mathcal{G} sur $X \times Y$ en posant

$$(x, y) \mathcal{G} (x', y') \Leftrightarrow (x = x' \text{ et } y \neq y' \text{ et } y, y' \in A_x) .$$

D'après le théorème de \mathcal{G}_0 -dichotomie, on sait que soit A a un ω -coloriage borélien, soit il existe un morphisme continu de \mathcal{G}_0 dans \mathcal{G} . Si l'on est dans le premier cas, alors on a une fonction borélienne $c: X \times Y \rightarrow \omega$ telle que chaque $c^{-1}(\{i\})$ soit \mathcal{G} -discret. Mais alors, chaque $c^{-1}(\{i\}) \cap A$ est un graphe borélien, et donc A est une réunion dénombrable de graphes boréliens.

On voit donc qu'il nous suffit de prouver qu'il est impossible qu'il y ait un morphisme continu de \mathcal{G}_0 dans \mathcal{G} . Raisonnons par l'absurde, et fixons un tel morphisme $\varphi: 2^\omega \rightarrow X \times Y$. Alors, si on note φ_X et φ_Y les deux applications coordonnées de φ , on voit que

$$\forall \alpha, \beta \in 2^\omega \quad \alpha \mathcal{G}_0 \beta \Rightarrow \varphi_X(\alpha) = \varphi_X(\beta) .$$

Par conséquent, φ_X doit être constante sur 2^ω ; notons x_0 la constante en question, et concentrons-nous sur φ_Y . Il est clair que $\varphi_Y^{-1}(Y \setminus A_{x_0})$ doit être \mathcal{G}_0 -discret, et donc (c'est un borélien!) maigre. De même, pour tout $y \in A_{x_0}$ l'ensemble borélien $\varphi_Y^{-1}(A_{x_0})$ est \mathcal{G}_0 -discret, donc maigre également. A l'aide du théorème de Kuratowski-Ulam, on en déduit que la relation d'équivalence E sur 2^ω définie par

$$(\alpha E \beta) \Leftrightarrow ((\varphi_Y(\alpha) \text{ et } \varphi_Y(\beta) \notin A_{x_0}) \text{ ou } (\varphi_Y(\alpha) = \varphi_Y(\beta) \in A_{x_0}))$$

est maigre. Mais alors, d'après le théorème de Kuratowski-Mycielski (que vous avez vu lors du partiel, et dont on redonnera une preuve dans la section suivante pour présenter les idées de la preuve du théorème de \mathcal{G}_0 -dichotomie) il existe une fonction continue $\psi: 2^\omega \rightarrow 2^\omega$ telle que

$$\alpha \neq \beta \Rightarrow \neg(\psi(\alpha) E \psi(\beta)) .$$

Considérons finalement la fonction $f = \varphi \circ \psi$. Il existe au plus un $\alpha_0 \in 2^\omega$ tel que $f(\alpha_0) \notin A_{x_0}$, et pour tous les autres $\alpha, \beta \in 2^\omega$ on doit avoir

$$\alpha \neq \beta \Rightarrow f(\alpha) \in A_{x_0} \text{ et } f(\beta) \in A_{x_0} \text{ et } f(\alpha) \neq f(\beta) .$$

Par conséquent, la section A_{x_0} n'est pas dénombrable, ce qui est absurde. ■

Le théorème de Lusin-Novikov a un corollaire très utile :

Corollaire 6.16. Soit X, Y deux polonais et $f: X \rightarrow Y$ une fonction borélienne à fibres dénombrables. Alors $f(X)$ est borélien et il existe une section borélienne $s: f(X) \rightarrow X$ de f , i.e une application borélienne s telle que $s \circ f = id_X$.

Preuve. En considérant le graphe de f , on voit qu'il nous suffit de prouver que, pour tous polonais X, Y et tout borélien $A \subseteq X \times Y$ à sections verticales dénombrables, la projection $\pi_X(A)$ de A sur X est borélienne et il existe une fonction borélienne $s: \pi_X(A) \rightarrow Y$ telle que pour tout $x \in \pi_X(A)$ on ait $(x, s(x)) \in A$ (une telle fonction s'appelle une *uniformisation borélienne* de A).

Par le théorème de Lusin-Novikov, on sait qu'il existe une famille dénombrable de graphes boréliens Γ_i tels que $A = \bigcup \Gamma_i$. Comme l'image borélienne injective d'un borélien est borélienne, chaque $\pi_X(\Gamma_i)$ est borélien et donc $\pi_X(A) = \bigcup \pi_X(\Gamma_i)$ est borélien.

Pour construire la section s , définissons récursivement $\tilde{\Gamma}_i$ en posant $\tilde{\Gamma}_0 = \Gamma_0$ et

$$\tilde{\Gamma}_i = \Gamma_i \setminus \bigcup_{j < i} (\pi_X(\tilde{\Gamma}_j) \times Y) .$$

Alors les $\tilde{\Gamma}_i$ sont encore des graphes boréliens, leurs projections sur X sont disjointes, et recouvrent $\pi_X(A)$. Finalement, $\bigcup \tilde{\Gamma}_i$ est une uniformisation borélienne de A . ■

Citons encore une application utile du théorème de Lusin-Novikov : le théorème de Feldman-Moore.

Exercice 6.17. Soit X un polonais et $E \subseteq X$ une relation d'équivalence borélienne à classes dénombrables. Alors il existe un groupe dénombrable G et une action borélienne de G sur X telle que la relation engendrée par cette action soit E .

Présentons une dernière conséquence du théorème de \mathcal{G}_0 -dichotomie : le théorème de Silver sur le nombre de classes d'une relation d'équivalence coanalytique. Ce résultat célèbre, démontré durant les années 70, a longtemps été un exemple de théorème qui restait hors de portée des techniques de la théorie descriptive classique et nécessitait des techniques plus sophistiquées - théorie descriptive effective et forcing, notamment. Ce n'est plus le cas, puisque ce théorème est une conséquence du théorème de \mathcal{G}_0 -dichotomie, donc on donnera une preuve « classique » (mais difficile !), due à B. Miller, dans la dernière section de ce cours.

Théorème 6.18. Soit X un polonais et E une relation d'équivalence coanalytique sur X . Alors, soit R a au plus un nombre dénombrable de classes, soit il existe une application continue $f: 2^\omega \rightarrow X$ telle que

$$\forall \alpha, \beta \in 2^\omega \quad \alpha \neq \beta \Rightarrow \neg(f(\alpha) E f(\beta)) .$$

Preuve. Définissons le graphe $\mathcal{G} = X^2 \setminus E$. C'est un graphe analytique, donc on peut lui appliquer le théorème de \mathcal{G}_0 -dichotomie. Si $c: X \rightarrow \omega$ est un coloriage borélien de \mathcal{G} , alors on doit avoir en particulier

$$\forall x, y \in X \neg(xEy) \Rightarrow c(x) \neq c(y) .$$

On voit donc immédiatement que, dans ce cas, E a au plus \aleph_0 classes d'équivalence. Il nous reste à voir que la seconde alternative du théorème de \mathcal{G}_0 -dichotomie impose que E a 2^{\aleph_0} classes d'équivalence.

Fixons donc un morphisme continu $\varphi: 2^\omega \rightarrow X$ de \mathcal{G}_0 dans \mathcal{G} , et notons $E' = (\varphi \times \varphi)^{-1}(E)$. Alors E' est une relation d'équivalence sur 2^ω , est co-analytique (donc Baire-mesurable) puisque c'est l'image réciproque d'un co-analytique par une fonction continue, et E' est \mathcal{G}_0 -discrète par définition de φ . Par conséquent, E' doit être maigre ; d'après le théorème de Kuratowski-Mycielski, il existe une application continue $\psi: 2^\omega \rightarrow 2^\omega$ telle que

$$\forall \alpha, \beta \in 2^\omega \neg(\psi(\alpha)E\psi(\beta)) .$$

Mais alors $f = \varphi \circ \psi$ est continue, et satisfait la condition recherchée. ■

6.5 \mathcal{G}_0 -dichotomie : preuve.

On va maintenant essayer de présenter de manière compréhensible la fameuse preuve « classique » du théorème de \mathcal{G}_0 -dichotomie. Notons tout de suite que cette preuve est difficile ! Pour préparer le lecteur, on va commencer par donner une preuve du théorème de Kuratowski-Mycielski dans l'esprit de la preuve du théorème de \mathcal{G}_0 -dichotomie.

Théorème 6.19. *Soit $R \subseteq 2^\omega \times 2^\omega$ une partie comaigne. Alors il existe une fonction continue $f: 2^\omega \rightarrow 2^\omega$ telle que*

$$\forall x \neq y \in 2^\omega (f(x), f(y)) \in R$$

Preuve. Commençons par fixer une suite décroissante d'ouverts denses (U_n) tels que $\bigcap U_n \subseteq R$.

Pour $n < \omega$, on appellera n -approximation une paire (k, u) avec $k < \omega$ et $u: 2^n \rightarrow 2^k$ une fonction.

Un raffinement d'une n -approximation (k, u) est une n -approximation (k', u') telle que $k' \geq k$ et $u': 2^n \rightarrow 2^{k'}$ est telle que

$$\forall s \in 2^n u(s) \subseteq u'(s) .$$

Lemme 6.6. *Soit $n \geq 1$, (k, u) une n -approximation et $s \neq t \in 2^n$. Alors il existe un raffinement (k', u') de (k, u) tel que $k' > k$ et $N_{u'(s)} \times N_{u'(t)} \subseteq U_n$.*

Preuve. Comme U_n est un ouvert dense, il existe $k' > k$ et $v, w \in 2^{k'}$ tels que $u(s) \subseteq v$, $u(t) \subseteq w$ et $N_v \times N_w \subseteq U_n$. N'importe quel raffinement (k', u') avec $u'(s) = v$ et $u'(t) = w$ satisfait la condition qui nous intéresse. ■_{lemme}

Expliquons maintenant comment prouver le théorème; on part de la 0-approximation donnée par $k_0 = 0$. Puis on applique récursivement le procédé suivant : supposons qu'on ait construit une n -approximation (k_n, u_n) . Alors on commence par introduire la $(n + 1)$ -approximation (k', u') définie par $k' = k_n$ et $u'(s \frown i) = u(s)$.

En appliquant un nombre fini de fois le lemme ci-dessus, on obtient une $(n + 1)$ -approximation (k_{n+1}, u_{n+1}) qui raffine (k', u') et satisfait la condition suivante :

$$\forall s \neq t \in 2^{n+1} \quad N_{u_{n+1}(s)} \times N_{u_{n+1}(t)} \subseteq U_{n+1} .$$

En répétant ce procédé, on obtient une suite de n -approximations (k_n, u_n) telle que $k_n \rightarrow \infty$ et on peut définir une fonction $f: 2^\omega \rightarrow 2^\omega$ en posant

$$f(x) = \lim_n u_n(x|_n) .$$

Notre construction assure que f est continue; par ailleurs, si $x \neq y \in 2^\omega$ on a $n < \omega$ tel que $x|_m \neq y|_m$ pour tout $m \geq n$, et on en déduit que

$$(f(x), f(y)) \subseteq \bigcap_{m \geq n} N_{u_m(x|_m)} \times N_{u_m(y|_m)} \subseteq R .$$

Ceci conclut la preuve du théorème de Kuratowski-Mycielski. ■

Il nous faut maintenant conclure ces notes, avec la preuve promise du théorème de Kechris, Solecki et Todorcevic. Avant de donner cette preuve, mettons en évidence une conséquence du théorème de séparation des ensembles analytiques.

Proposition 6.20. *Soit X un espace polonais, \mathcal{G} un graphe analytique sur X , et $A \subseteq X$ un ensemble \mathcal{G} -discret et analytique. Alors il existe un ensemble borélien \tilde{A} contenant A et \mathcal{G} -discret*

Preuve. Soit A, \mathcal{G} comme dans l'énoncé. Alors $A \cap \pi_1(\mathcal{G} \cap (X \times A)) = \emptyset$, et comme ces deux ensembles sont analytiques dans X on voit qu'il existe un ensemble borélien $A_0 \supseteq A$ tel que $A_0 \cap \pi_1(\mathcal{G} \cap (X \times A)) = \emptyset$. Autrement dit,

$$(A_0 \times A) \cap \mathcal{G} = \emptyset .$$

En appliquant le même raisonnement sur la deuxième coordonnée, on voit qu'il existe un ensemble borélien A_1 contenant A et tel que

$$(A_0 \times A_1) \cap \mathcal{G} = \emptyset .$$

Alors $\tilde{A} = A_0 \cap A_1$ est borélien, contient A , et est \mathcal{G} -discret. ■

Dans la suite, on fixe un polonais X et un graphe analytique \mathcal{G} sur X , pour lequel on souhaite prouver qu'une des deux alternatives du théorème de \mathcal{G}_0 -dichotomie est vraie. On ote $\text{dom}(\mathcal{G})$ le domaine de \mathcal{G} , et on fixe deux surjections continues $\varphi_X: \mathcal{N} \rightarrow X$ et $\varphi_{\mathcal{G}}: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{G}$. On se donne aussi une énumération $\{s_n\}$ de l'ensemble I utilisé pour définir \mathcal{G}_0 , telle que $|s_n| = n$ pour tout n .

On va maintenant essayer de construire un morphisme de \mathcal{G}_0 dans \mathcal{G} , en utilisant ce qu'on va appeler des *approximations intérieures* et des *approximations extérieures*; si on n'arrive pas à obtenir un morphisme, alors notre construction par approximations successives nous permettra d'obtenir un coloriage borélien de \mathcal{G}_0

Définition 6.21. Soit $n < \omega$. Une *approximation intérieure* (de rang n) est une paire (u, v) avec $u: 2^n \rightarrow \omega^n$ et $v: 2^{<n} \rightarrow \omega^{<n}$.

Une *extension* d'une approximation intérieure de rang n est une approximation intérieure (u', v') de rang $m \geq n$ et telle que

- $\forall s \in 2^n \forall s' \in 2^m \ s \sqsubseteq s' \Rightarrow u(s) \sqsubseteq u'(s')$;
- $\forall t \in 2^{<n} \forall s' \in 2^{<m} \ (t \sqsubseteq t' \text{ et } |t'| = |t| + m - n) \Rightarrow (v(t) \sqsubseteq v'(t'))$.

Si $m = n + 1$ on dira que (u', v') est une 1-extension de (u, v) .

On fixe pour le reste de la preuve une énumération $(p_n) = (u_n, v_n)$ des approximations globales, qui sont en nombre dénombrable. On n'utilisera pas tout de suite cette énumération; il nous reste encore une autre notion d'approximation à introduire, où on voit bien apparaître le fait qu'on essaie de construire, par approximations successives, une application $\pi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{N}$ telle que $\varphi_X \circ \pi$ soit un morphisme de \mathcal{G}_0 dans \mathcal{G} .

Définition 6.22. Une *approximation extérieure* (de rang n) est une paire (f, g) avec $f: 2^n \rightarrow \mathcal{N}$ et $g: 2^{<n} \rightarrow \mathcal{N}$ et telle que

$$\forall n < \omega \forall k < n \forall t \in \varphi_{\mathcal{G}} \varphi_{\mathcal{G}}(g(t)) = (\varphi_X(f(s_k \frown 0 \frown x)), \varphi_X(f(s_k \frown 1 \frown x))).$$

(Rappelons que les s_n ci-dessus sont celles qui ont servi à définir \mathcal{G}_0)

On ne voit pas de condition sur les approximations intérieures qui dise qu'on essaie de construire un morphisme; en fait cette condition est imposée par le fait de considérer des approximations intérieures/extérieures qui soient *compatibles*.

Définition 6.23. Une approximation extérieure de rang n (f, g) est *compatible* avec une approximation intérieure de rang n (u, v) si l'on a

- $\forall s \in 2^n \ u(s) \sqsubseteq f(s)$ et
- $\forall t \in 2^{<n} \ v(s) \sqsubseteq g(t)$.

On souhaite aussi contrôler l'image de l'application qu'on construit ; pour cela on dit, si $Y \subseteq X$, qu'une approximation intérieure de rang n (f, g) est *compatible* avec Y si $\varphi_X \circ f(2^n) \subseteq Y$.

Définition 6.24. Si p est une n -approximation intérieure de rang n et $Y \subseteq X$, on note $L_n(p, Y)$ l'ensemble des n -approximations extérieures qui sont compatibles à la fois avec p et Y . On dit que p est *Y -terminale* si $L_{n+1}(q, Y) = \emptyset$ pour toute 1-extension q de p (autrement dit, on ne peut pas étendre p à une approximation intérieure qui soit compatible avec une approximation extérieure « à valeurs dans Y »).

On en a fini avec les définitions nécessaires à la preuve ; introduisons quelques notations pour nous simplifier la vie avant de commencer la preuve proprement dite. On notra dans la suite

$T(Y) = \{(u, v) : (u, v) \text{ est une approximation intérieure } \} \ Y\text{-terminale, et}$

$$A(p, Y) = \bigcup_{n \in \omega} \{\varphi_X \circ f(s_n) : (f, g) \in L_n(p, Y)\}$$

Le noyau combinatoire de la preuve de Ben Miller du théorème de Kechris, Solecki et Todorcevic est contenu dans les lemmes suivants, qu'on isole dans une sous-section pour essayer de faciliter la compréhension d'un hypothétique lecteur.

6.5.1 Quelques lemmes.

Dans cette sous-section on fixe un borélien $Y \subseteq X$, un ordinal dénombrable α et un coloriage borélien $c: X \setminus Y \rightarrow \omega \cdot \alpha$ de $\mathcal{G}_{|(X \setminus Y)}$; on veut essayer d'étendre ce coloriage en un nouveau coloriage avec un domaine plus grand (autrement dit, colorier des points de Y) et des valeurs dans $\omega \cdot (\alpha + 1)$.

Lemme 6.7. *Soit p une approximation intérieure telle que $A(p, Y)$ ne soit pas \mathcal{G} -discret. Alors $p \notin T(Y)$.*

Preuve. Fixons une n -approximation intérieure $p = (u, v)$ telle que $A(p, Y)$ ne soit pas \mathcal{G} -discret, ce qui nous donne deux approximations extérieures (f_0, g_0) et (f_1, g_1) qui sont compatibles avec p et Y et telles que

$$(\varphi_X \circ f_0(s_n), \varphi_X \circ f_1(s_n)) \in \mathcal{G} .$$

On veut construire une approximation extérieure (f', g') qui soit compatible avec Y et avec une 1-extension de p . On le fait de la manière suivante : on commence par noter qu'il existe $\alpha \in \mathcal{N}$ tel que

$$(\varphi_X \circ f_0(s_n), \varphi_X \circ f_1(s_n)) = \varphi_{\mathcal{G}}(\alpha) .$$

Ensuite on définit notre approximation extérieure en posant

- $\forall s \in 2^n \forall i \in \{0, 1\} f(s \frown i) = f_i(s)$;
- $g'(\emptyset) = \alpha$ et $g'(t \frown i) = g_i(t)$ pour tout $t \in 2^{<n}$ et tout $i \in \{0, 1\}$.

Cette extension est compatible avec Y ; en regardant les définitions, vous devez pouvoir vous convaincre qu'il existe une 1-extension de p qui est compatible avec (f', g') , et donc p n'est pas Y -terminale. ■.

En utilisant la proposition 6.20 et le lemme 6.7, on voit que si $p \in T(Y)$ alors $A(p, Y)$ est \mathcal{G} -discret et est donc contenu dans un borélien $B(p, Y)$ qui est \mathcal{G} -discret. On définit maintenant

$$Y'' = \bigcup_{p \in T(Y)} B(p, Y) , \text{ et}$$

$$Y' = Y \setminus Y'' .$$

Alors Y' , Y'' sont tous deux contenus dans Y , et on va étendre notre coloriage en un coloriage défini sur $X \setminus Y'$. Pour cela, on commence par définir, pour tout $y \in Y''$,

$$n(y) = \min\{n < \omega : p_n \in T(Y) \text{ et } y \in B(p_n, Y)\} .$$

Cette fonction est borélienne, puisque tous les $B(p, Y)$ sont boréliens. On peut maintenant définir une fonction $c' : X \setminus Y' \rightarrow \omega \cdot (\alpha + 1)$ en posant

$$c'(x) = \begin{cases} c(x) & \text{si } x \in X \setminus Y \\ \omega \cdot \alpha + n(x) & \text{si } x \in Y'' . \end{cases}$$

Cette fonction est borélienne (i.e $c^{-1}(\beta)$ est borélien pour tout ordinal $\beta < \omega \cdot \alpha + 1$) et comme c était un coloriage on sait que chaque $c^{-1}(\beta)$ avec $\beta < \omega \cdot \alpha$ est \mathcal{G} -discret. Pour voir que c' est un coloriage borélien de $\mathcal{G}|_{(X \setminus Y')}$, on doit donc simplement montrer que chaque ensemble

$$\{y \in Y'' : n(y) = n\}$$

est \mathcal{G} -discret. C'est une conséquence immédiate du fait que cet ensemble est contenu dans $B(p_n, Y)$, qui est \mathcal{G} -discret par définition.

On a donc étendu notre coloriage, et on sent poindre une construction inductive d'un coloriage borélien (on part du coloriage vide, qu'on étend, et on répète ad infinitum). Mais pourquoi cette construction finirait-elle par s'arrêter ? La cause en est contenue dans le lemme suivant.

Lemme 6.8. *Soit p une approximation intérieure dont toutes les 1-extensions sont Y -terminales. Alors p est Y' -terminale.*

Preuve. On raisonne par l'absurde ; soit $p = (u, v)$ une approximation intérieure de rang n dont toutes les 1-extensions sont Y -terminales. Par l'absurde, supposons qu'il existe une 1-extension $p' = (u', v')$ de p qui ne soit pas Y' -terminale, c'est-à-dire qu'il existe $(f, g) \in L_{n+1}(p', Y')$. Alors on doit avoir $\varphi_X \circ f(s_{n+1}) \in B(p', Y)$ et $B(p', Y) \cap Y' = \emptyset$ (puisque p' est Y -terminale), donc $\varphi_X \circ f(s_{n+1}) \notin Y'$, ce qui contredit le fait que (f, g) soit compatible avec Y' . ■

6.5.2 Fin de la preuve.

Maintenant, nous avons toutes les cartes en main pour conclure notre preuve. On définit récursivement une suite décroissante (indexée par les ordinaux dénombrables) de boréliens Y_α et de coloriages boréliens $c_\alpha : X \setminus Y_\alpha \rightarrow \omega \cdot \alpha$ de $\mathcal{G}|_{(X \setminus Y_\alpha)}$ en posant

$$(Y_\alpha, c_\alpha) = \begin{cases} (X, \emptyset) & \text{si } \alpha = 0 \\ (Y'_\beta, c'_\beta) & \text{si } \alpha = \beta + 1, \text{ et} \\ (\bigcap_{\beta < \alpha} Y_\beta, \lim_{\beta \rightarrow \alpha} c_\beta) & \text{si } \alpha \text{ est limite.} \end{cases}$$

Le cardinal de l'ensemble des n -approximations intérieures est \aleph_0 ; de plus si p est Y_α -terminale alors p est Y_β -terminale pour tout $\beta \geq \alpha$. Par conséquent, si pour tout n on introduit

$$\alpha_n = \begin{cases} 0 & \text{si } p_n \text{ n'est jamais } Y_\beta\text{-terminale} \\ \min\{\beta : p_n \text{ est } Y_\beta\text{-terminale}\} & \text{sinon} \end{cases}$$

et qu'on pose $\alpha = \sup \alpha_n$, alors α est un ordinal dénombrable et

$$T(Y_\alpha) = T(Y_{\alpha+1}) .$$

Maintenant, appelons p l'approximation intérieure de rang 0. Notons que $\text{dom}(\mathcal{G}) \cap Y_\alpha$ est contenu dans $A(p, Y_\alpha)$, par conséquent si p est Y_α -terminale

alors c_α s'étend en un coloriage borélien de \mathcal{G} tout entier à valeurs dans $\omega \cdot (\alpha + 1)$, et par conséquent \mathcal{G} a un ω -coloriage borélien.

Il nous reste à prouver que, si p n'est pas Y_α -terminale, alors il existe un morphisme de \mathcal{G}_0 dans \mathcal{G} . Pour cela, notons que à l'aide du lemme 6.8 on peut produire une suite d'approximations intérieures de rang n $q_n = (u_n, v_n)$ telles que q_{n+1} est une 1-extension de q_n et q_n est Y_α -terminale pour tout $n < \omega$.

On peut se servir de cette suite d'approximations pour construire des fonctions continues $\pi: 2^\omega \rightarrow \omega^\omega$ et $\pi_k: 2^\omega \rightarrow \omega^\omega$ pour tout $k < \omega$ en posant

$$\pi(x) = \lim_{n \rightarrow \omega} u_n(x|_n) ,$$

$$\pi_k(x) = \lim_{n \rightarrow \omega} v_{n+k+1}(x|_n) .$$

Le lemme suivant conclut la preuve (et ces notes de cours, par la même occasion).

Lemme 6.9. $\varphi_X \circ \pi$ est un morphisme continu de \mathcal{G}_0 dans \mathcal{G} .

Preuve. Par construction π est continue ; pour montrer que $\varphi_X \circ \pi$ un morphisme de \mathcal{G}_0 dans \mathcal{G} , il nous faut montrer que

$$\forall k < \omega \forall \alpha \in 2^\omega (\varphi_X \circ \pi(s_k \frown 0 \frown \alpha), \varphi_X \circ \pi(s_k \frown 1 \frown \alpha)) \in \mathcal{G} .$$

Pour cela, il est bien sûr suffisant de montrer qu'on a en fait, pour tout entier k et toute suite binaire α ,

$$\varphi_{\mathcal{G}} \circ \pi_k(\alpha) = (\varphi_X \circ \pi(s_k \frown 0 \frown \alpha), \varphi_X \circ \pi(s_k \frown 1 \frown \alpha))$$

Par continuité de ces applications, il nous suffit de montrer que pour tout voisinage ouvert $U \times V$ de

$$(\pi_k(x), (\pi(s_k \frown 0 \frown \alpha), \pi(s_k \frown 1 \frown \alpha)))$$

il existe $(z, (z_0, z_1)) \in U \times V$ tel que

$$\varphi_{\mathcal{G}}(z) = (\varphi_X(z_0), \varphi_X(z_1)) .$$

Pour cela, commençons par fixer $n < \omega$ suffisamment grand pour que $N_{v_{k+n+1}(\alpha|_n)}$ soit contenu dans U et

$$N_{u_{k+n+1}(s_k \frown 0 \frown \alpha|_n)} \times N_{u_{k+n+1}(s_k \frown 1 \frown \alpha|_n)} \subseteq V .$$

On sait qu'il existe $(f, g) \in L(q_{n+k+1}, Y_\alpha)$; par définition on voit que

$$z = g(x|_n), \quad z_0 = f(s_k \frown 0 \frown \alpha|_n), \quad z_1 = f(s_k \frown 1 \frown \alpha|_n)$$

satisfont aux conditions recherchées. ■

Notes bibliographiques. Le début du chapitre (avant le théorème de Kechris-Solecki-Todorcevic) est standard et se trouve dans les références habituelles pour ce cours, en particulier [Kec95], [BK96] et [Gao09]. La fin vient de notes non publiées (au moment où ce cours a été donné en tout cas) de Ben Miller.

Annexe A

Les axiomes de Zermelo-Fraenkel

Dans cette annexe on va essayer de décrire brièvement le cadre de la théorie axiomatique de Zermelo-Fraenkel, (ZF).

Nous avons tous une notion intuitive d'ensemble, comme "collection d'objets". De même, nous avons une notion intuitive de ce que signifie appartenir à un tel ensemble. Mais pour faire des mathématiques, on a besoin que ces ensembles aient des propriétés qui correspondent à notre intuition ; par exemple on voudrait pouvoir former l'union d'un ensemble d'ensembles. On pourrait se contenter de s'autoriser ces manipulations intuitives (après tout on "voit" bien ce que cela signifie que d'appartenir à la réunion d'un ensemble d'ensembles). Mais le problème est alors que ce qui semble "intuitif" ne l'est pas forcément. Par exemple, pourquoi ne pourrait-on pas considérer l'ensemble de tous les ensembles ? Cela amène à des paradoxes bien connus, et a provoqué la naissance de l'approche *axiomatique* de la théorie des ensembles : on voudrait spécifier les axiomes que doivent vérifier les ensembles "mathématiques" (par opposition aux ensembles intuitifs) et dériver, à partir de notre liste d'axiomes, les propriétés des ensembles qui nous permettent de mener des raisonnements mathématiques.

Bien sûr, il faut se donner un point de départ ; pour nous, c'est un *univers*, c'est-à-dire un ensemble au sens intuitif \mathcal{U} , non vide. Les éléments de cet ensemble intuitif sont les ensembles mathématiques, et on voudrait pouvoir spécifier les propriétés de ces objets. Dans la suite, on utilisera, pour éviter les confusions, le terme "collection" pour parler d'un ensemble intuitif et le terme "ensemble" sera réservé aux ensembles mathématiques, c'est-à-dire aux éléments de la collection \mathcal{U} .

On a aussi besoin d'une relation binaire \in définie sur \mathcal{U} , dont on voudrait qu'elle corresponde à l'idée que l'on se fait de la relation d'appartenance. Par exemple, on voudrait que si x, y sont des ensembles ayant les mêmes éléments alors $x = y$. Mais quels énoncés peut-on écrire dans le langage de la théo-

rie des ensembles? Eh bien, simplement ceux que l'on peut former avec les quantificateurs \forall et \exists , les conjonctions et disjonctions, ainsi que les opérations de substitution et de restriction appliquées en partant des relations $=$ et \in . Pour un logicien, il s'agit des énoncés du premier ordre dans le langage à deux éléments $\{\in, =\}$.

Un énoncé sans variable libre est dit *clos*; il est soit vrai soit faux dans l'univers \mathcal{U} où on s'est placé. Les axiomes de (ZF) sont des énoncés clos, et un modèle de (ZF) est un univers où chacun de ces axiomes est vérifié. Donnons quelques exemples :

- Si $a \in \mathcal{U}$ on peut former l'énoncé à une variable libre et un paramètre $x = a$.
- On peut aussi formuler l'énoncé à trois variables libres $R(x, y, z)$ défini par

$$\forall t (t \in z) \Leftrightarrow (t = x \text{ ou } t = y) .$$

- Par exemple, à partir de l'énoncé R ci-dessus, on peut former l'énoncé clos

$$\forall x \forall y \exists z R(x, y, z) .$$

Chaque énoncé $R(x_1, \dots, x_k)$ à exactement k variables libres définit une *relation*, qui est la collection des k -uplets (a_1, \dots, a_k) d'éléments de \mathcal{U} tels que $R(a_1, \dots, a_k)$ soit vrai; rappelons que $R(a_1, \dots, a_k)$ est l'énoncé clos obtenu en substituant a_1, \dots, a_k aux variables libres de R .

Certaines relations (éventuellement avec des paramètres a_1, \dots, a_k) sont particulièrement importantes : ce sont les *relations fonctionnelles*; une relation $R(x, y)$ à exactement deux variables libres est une relation fonctionnelle (à 1 argument) si

$$\forall x \forall y \forall z (R(x, y) \text{ et } R(x, z) \Rightarrow y = z) .$$

On définit de même les relations fonctionnelles à n arguments; étant donné une relation fonctionnelle $R(x, y)$ on définit son *domaine* comme la collection des $x \in \mathcal{U}$ tels que $\exists z R(x, z)$ et son *image* comme la collection des $z \in \mathcal{U}$ tels que $\exists x R(x, z)$.

Venons-en à l'énoncé des axiomes de (ZF).

1. Axiome d'extensionnalité

On est habitué à penser que deux ensembles sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes éléments.

Dans le langage de la théorie des ensembles, cet énoncé s'écrit ainsi :

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \Leftrightarrow (z \in y)) \Rightarrow x = y) .$$

2. Axiome de la réunion

Dans le langage usuel, cet axiome dit que si $(X_i)_{i \in I}$ est une famille d'ensembles (i.e I est un ensemble et chaque X_i aussi) alors on peut former un nouvel ensemble dont les éléments sont exactement ceux qui appartiennent à un X_i . On a déjà dit que pour un théoricien des ensembles tout objet mathématique est un ensemble ; ainsi cet axiome doit dire que pour tout ensemble a il existe un ensemble b dont les éléments sont exactement les éléments des éléments de a . La formule correspondante est :

$$\forall a \exists b \forall x ((x \in b) \Leftrightarrow (\exists y (y \in a \text{ et } x \in y)) .$$

3. Axiome de l'ensemble des parties

Pour tout ensemble X on veut pouvoir former un ensemble dont les éléments sont les parties de X , autrement dit on a besoin de l'énoncé suivant :

$$\forall x \exists y (z \in y) \Leftrightarrow (\forall t (t \in z) \Rightarrow t \in x) .$$

3. Schéma d'axiomes de remplacement

Il s'agit en fait d'une infinité d'axiomes. Le schéma d'axiome de remplacement nous permet, à partir d'une relation fonctionnelle et d'un ensemble, de former un nouvel ensemble. Par exemple il nous permet de former l'image d'un ensemble par une fonction (en tant qu'*ensemble*, et pas seulement comme une collection).

Formellement, ce schéma dit que si $E(x, y, a_1, \dots, a_k)$ est un énoncé à paramètres a_1, \dots, a_k qui définit une relation fonctionnelle à 1 variable, et a est un ensemble, alors on peut considérer l'ensemble b dont les éléments sont les images par la relation fonctionnelle E des éléments de a appartenant au domaine de notre relation fonctionnelle.

Alors le schéma d'axiome de remplacement consiste en la liste, paramétrée par tous les énoncés $E(x, y, x_1, \dots, x_k)$ sans paramètres et à au moins deux variables libres des énoncés suivants :

$$\begin{aligned} \forall x_1 \dots \forall x_k (\forall y, y' (E(x, y, x_1, \dots, x_k) \text{ et } E(x, y', x_1, \dots, x_k)) \Rightarrow y = y') \\ \Rightarrow \forall t \exists u \forall y (y \in u \Leftrightarrow \exists x (x \in t \text{ et } E(x, y, x_1, \dots, x_k)) . \end{aligned}$$

Il nous manque encore un axiome pour obtenir toute la liste d'axiomes de Zermelo-Fraenkel. Notons déjà que d'autres énoncés (couramment cités comme des axiomes de ZF) découlent des axiomes précédents.

Schéma d'axiomes de compréhension

Ce schéma découle directement du schéma d'axiomes de remplacement ; il dit que tous les éléments d'un ensemble a qui vérifient une relation forment un ensemble. Pour donner une formule, considérons un énoncé $A(x, x_1, \dots, x_k)$ sans paramètres et à au moins 1 variable libre x . Alors on a

$$\forall x_1, \dots, x_k \forall x \exists z (y \in z) \Leftrightarrow (y \in a \text{ et } A(x, x_1, \dots, x_k)) .$$

Cet énoncé découle du schéma de substitution appliqué à la relation

$$x = y \text{ et } A(x, x_1, \dots, x_k) .$$

Axiome de l'ensemble vide

Cet axiome dit qu'il existe un ensemble et un seul qui n'a aucun élément. L'unicité est une conséquence directe de l'axiome d'extensionnalité. Pour prouver l'existence d'un tel ensemble, il suffit d'appliquer le schéma de compréhension à un ensemble a de \mathcal{U} et à l'énoncé $x \neq x$: en effet, on obtient qu'il existe un ensemble noté \emptyset tel que

$$\forall x x \in \emptyset \Leftrightarrow (x \in a \text{ et } x \neq x)$$

Par conséquent, $\forall x x \notin \emptyset$.

Axiome de la paire

Cet axiome dit que, étant donnés deux ensembles x, y il existe un ensemble z dont les éléments sont exactement x et y . En formules :

$$\forall x \forall y \exists z \forall t (t \in z) \Leftrightarrow (t = x \text{ ou } t = y) .$$

On veut définir la paire $\{x, y\}$. Notons qu'avec l'axiome de l'ensemble des parties on peut former l'ensemble $\{\emptyset\}$ qui n'a qu'un seul élément (\emptyset) et de même on peut former l'ensemble des parties de $\{\emptyset\}$ qui, grâce à l'axiome d'extensionnalité, a deux éléments : \emptyset et $\{\emptyset\}$. On vient donc de prouver l'existence de $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Soient maintenant deux ensembles x, y quelconques. Définissons une relation fonctionnelle $R(a, b)$ par

$$(a = \emptyset \text{ et } b = x) \text{ ou } (a = \{\emptyset\} \text{ et } b = y) .$$

En appliquant le schéma de substitution à cette relation et à l'ensemble $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ on obtient un ensemble qui n'a que x, y comme éléments.

C'est un bon exercice de voir qu'avec nos axiomes on peut former produit et intersection d'une famille d'ensembles.

Il nous reste encore un axiome à énoncer ; avant de lire l'énoncé de cet axiome il faut avoir lu la définition des ordinaux (leur existence ne dépend que des axiomes déjà énoncés).

4. Axiome de l'infini

Cet axiome dit simplement : il existe un ordinal non fini.

Rappelons qu'un ordinal α est fini si tout ordinal $\beta \leq \alpha$ et différent de 0 est un ordinal successeur. Autrement dit, un ordinal fini est un entier naturel.

Une façon équivalente d'énoncer cet axiome est : la collection des ordinaux finis est un ensemble ; ou encore : il existe un ordinal limite.

Axiome de fondation

Cet ensemble dit que pour tout ensemble non vide x , il existe un ensemble $y \in x$ et tel que $y \cap x = \emptyset$. En particulier l'axiome de fondation interdit l'existence d'ensembles x tels que $x \in x$, ou l'existence de suites $(x_n)_{n \in \omega}$ telles que $x_{n+1} \in x_n$ pour tout n .

Cet axiome, noté AF, n'est *pas* une conséquence des axiomes de (ZF) ; il est courant de se placer dans le cadre axiomatique ZF+AF, qui permet par exemple de caractériser les ordinaux de façons plus simple que dans un univers ne vérifiant pas AF.

Si on part d'un univers \mathcal{U} satisfaisant les axiomes de ZF, et qu'on définit $V_0 = \emptyset$, $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$ et $V_\alpha = \cup_{\beta < \alpha} V_\beta$ pour α limite, on obtient une collection d'ensembles dont on peut former la réunion (au sens naïf). Notons V cette réunion ; on peut montrer que si \mathcal{U} est un modèle de (ZF) alors V est un modèle de ZF+AF.

Il serait malhonnête de conclure cette section sans évoquer le problème suivant : existe-il un univers \mathcal{U} dans lequel nos axiomes sont vérifiés ? De façon malheureuse, mais peu surprenante, croire qu'il en existe un est un acte de foi. Le fameux théorème de Gödel affirme en effet qu'il est impossible de démontrer (avec des théorèmes de (ZF)) que (ZF) est consistante, c'est-à-dire que ses axiomes n'entraînent pas de contradiction. Toute théorie suffisamment complexe pour permettre de développer les mathématiques classiques se trouvant dans le même cas, la solution n'est pas de changer nos axiomes ; il nous faut simplement espérer que la théorie n'est pas contradictoire.

Notes bibliographiques. Toute cette annexe a été reprise dans l'excellent livre de Krivine [Kri98].

Annexe B

Filtres, ultrafiltres, ultraproducts

Dans cette annexe, comme dans tout le cours, on se place dans un univers où l'axiome du choix est vrai.

Définition B.1. Soit X un ensemble infini. Un *filtre* sur X est une famille $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$;
2. $A \in \mathcal{F}$ et $B \supseteq A \Rightarrow B \in \mathcal{F}$;
3. $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

L'exemple le plus simple de filtre, et aussi le moins intéressant, est le suivant : pour tout $x \in X$, l'ensemble $\mathcal{F}_x = \{A : x \in A\}$ est un filtre.

Nettement plus intéressant : l'ensemble

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq X : \text{le complémentaire de } A \text{ est fini}\}$$

est un filtre sur X (toujours supposé infini, ce qui sera le cas dans toute cette section), appelé *filtre de Fréchet* sur X .

Exercice B.2. Soit \mathcal{F} un filtre sur l'ensemble infini X . Montrer que soit \mathcal{F} contient le filtre de Fréchet sur X , soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_x$ pour un certain $x \in X$.

L'exercice ci-dessus nous dit que tous les filtres "intéressants" contiennent le filtre de Fréchet. Mais comment peut-on définir de nouveaux filtres ?

Définition B.3. On dit qu'une famille $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ est une *base de filtre* si toutes les intersections finies d'éléments de \mathcal{A} sont non videsⁱ.

i. Ce que j'appelle ici base de filtre est souvent appelé *prébase* de filtre

Proposition B.4. *Pour toute base de filtre \mathcal{A} il existe un filtre contenant \mathcal{A} ; le plus petit tel filtre est défini par*

$$\mathcal{F} = \left\{ B \subseteq X : \exists A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \ B \supseteq \bigcap_{i=1}^n A_i \right\} .$$

Preuve.

Soit \mathcal{A} une base de filtre; il est clair que \mathcal{F} contient \mathcal{A} et que tout filtre contenant \mathcal{A} doit contenir la famille \mathcal{F} définie ci-dessus, donc il nous suffit de prouver que \mathcal{F} est bien un filtre.

On voit tout de suite que \mathcal{F} satisfait les points 1 et 2 de la définition d'un filtre; d'autre part, comme toute intersection finie d'éléments de \mathcal{A} est non vide, on voit que $\emptyset \notin \mathcal{F}$ et donc \mathcal{F} est bien un filtre. \square

Définition B.5. On dit qu'un filtre \mathcal{F} est un *ultrafiltre* si pour tout filtre \mathcal{G} on a

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{F} = \mathcal{G} .$$

Les ultrafiltres sont donc exactement les filtres maximaux pour l'inclusion; on dit qu'un ultrafiltre est *non principal* s'il n'est pas égal à un \mathcal{F}_x .

On vérifie facilement que l'ensemble des filtres contenant un filtre donné, ordonné par l'inclusion, est un ensemble ordonné inductif. Par conséquent, le lemme de Zorn garantit qu'il existe des ultrafiltres contenant tout filtre donné; cet axiome, appelé *axiome de l'ultrafiltre*, est plus faible que l'axiome du choix.

Notons en tous les cas que, en présence de l'axiome de l'ultrafiltre, il existe des ultrafiltres non principaux sur tout ensemble infini X , puisqu'il existe des ultrafiltres contenant le filtre de Fréchet sur X .

Proposition B.6. *Un filtre \mathcal{F} est un ultrafiltre si, et seulement si, pour tout $A \in X$ on a $A \in \mathcal{F}$ ou $X \setminus A \in \mathcal{F}$.*

Preuve.

Supposons que \mathcal{F} soit un filtre et qu'il existe $A \subseteq X$ tel que ni A ni $X \setminus A$ n'appartiennent à \mathcal{F} . Alors on va montrer que $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cup \{A\}$ est une base de filtre, ce qui garantira l'existence d'un filtre contenant strictement \mathcal{F} et montrera donc que \mathcal{F} n'est pas un ultrafiltre.

Soit donc $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{F}$; on doit montrer que $B_1 \cap \dots \cap B_n \cap A$ ne peut être vide.

Raisonnons par l'absurde : si cette intersection est vide, alors $B_1 \cap \dots \cap B_n \subseteq X \setminus A$, ce qui montre que $X \setminus A \in \mathcal{F}$ et cela contredit notre hypothèse. Donc

\mathcal{G} est bien une base de filtre et \mathcal{F} n'est pas un ultrafiltre.

Réciproquement, supposons que \mathcal{F} soit un filtre qui ne soit pas un ultrafiltre. Alors il existe un filtre \mathcal{G} contenant strictement \mathcal{F} ; considérons $A \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$. On ne peut avoir $X \setminus A \in \mathcal{G}$ puisque \mathcal{G} est un filtre, a fortiori il est impossible que $X \setminus A \in \mathcal{F}$ et donc ni A ni $X \setminus A$ n'appartiennent à \mathcal{F} . \square

Dans les exercices en fin de section, on essaie de donner un exemple simple d'*ultraproduit*, objet très utile en théorie des modèles et basé sur l'existence d'ultrafiltres. Intuitivement, un ultrafiltre choisit pour toute partie A de X si elle est grosse (i.e appartient à l'ultrafiltre) ou petite (n'appartient pas à l'ultrafiltre), de telle façon que toute partie est soit grosse soit petite, que A soit grosse si et seulement si son complémentaire est petit, qu'une intersection finie de parties grosses soit grosse et que l'espace tout entier soit gros.

On va conclure cette section en expliquant pourquoi les filtres et ultrafiltres peuvent être utiles en topologie; la justification de l'introduction des filtres en topologie est que dans certains espaces les points n'ont pas de base dénombrable de voisinages, et alors on ne peut plus se contenter d'utiliser des suites pour caractériser les notions habituelles de topologie (fonctions continues, ensembles fermés, etc.). Pourtant il est agréable de raisonner séquentiellement; on peut alors utiliser des *suites généralisées*, comme le font généralement les anglo-saxons, ou bien des filtres. Voyons comment fonctionne cette deuxième approche.

Revenons aux espaces topologiques; commençons par remarquer que, si X est un espace topologique et $x \in X$ alors la famille des voisinages de x , notée \mathcal{V}_x , forme un filtre. Ce filtre est l'analogue dans le contexte des espaces topologiques du filtre \mathcal{F}_x défini plus haut.

Définition B.7. Soit X un espace topologique, \mathcal{F} un filtre sur X et $x \in X$. On dit que \mathcal{F} *converge vers* x si \mathcal{F} contient le filtre \mathcal{V}_x des voisinages de x .

Exercice B.8. Soit X un espace topologique. Montrer que X est séparé si, et seulement si, tout filtre convergent sur X a une limite unique.

Si l'on veut pouvoir utiliser nos filtres pour faire de la topologie, il faut qu'on comprenne ce qui arrive à un filtre quand on lui applique une fonction f . Si l'on considère simplement l'ensemble des images par f des parties contenues dans notre filtre, on n'obtient en général pas un filtre, tout bêtement parce que f n'est a priori pas surjective! Par contre on obtient bien une base de filtre.

Définition B.9. Soit X, Y deux ensembles, \mathcal{F} un filtre sur X et $f: X \rightarrow Y$ une fonction. Alors $\{B \subseteq Y: \exists A \in \mathcal{F} B = f(A)\}$ est une base de filtre, et

on appelle *filtre image* de \mathcal{F} par f le filtre engendré par cette base de filtre. Notons que A appartient au filtre image de \mathcal{F} par f si, et seulement si, $f^{-1}(A)$ appartient à \mathcal{F} .

On laisse en exercice le fait de prouver que la famille introduite ci-dessus est bien une base de filtre.

Proposition B.10. *Le filtre image d'un ultrafiltre sur X est un ultrafiltre sur Y .*

Preuve.

Soit X, Y deux ensembles, $f: X \rightarrow Y$ une fonction et \mathcal{U} un ultrafiltre sur X . On sait que $f(\mathcal{U})$ est un filtre. Pour prouver qu'il s'agit en fait d'un ultrafiltre, fixons une partie A de Y dont on suppose qu'elle n'appartient pas à $f(\mathcal{U})$. Alors on sait que $f^{-1}(A)$ n'appartient pas à \mathcal{U} , par conséquent $X \setminus f^{-1}(A) \in \mathcal{U}$ et donc $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$ appartient à \mathcal{U} . Ceci montre bien que $Y \setminus A$ appartient à $f(\mathcal{U})$, et donc $f(\mathcal{U})$ est un ultrafiltre. \square

La proposition ci-dessous explique comment les notions que nous avons introduites permettent de caractériser les fonctions continues.

Proposition B.11. *Soit X, Y deux espaces topologiques, $x \in X$ et $f: X \rightarrow Y$ une fonction.*

Alors f est continue en x si, et seulement si, $f(\mathcal{F})$ converge vers $f(x)$ pour tout filtre \mathcal{F} qui converge vers x .

Preuve.

Commençons par supposer f continue en x , et considérons un filtre \mathcal{F} qui converge vers x . Soit V un voisinage de $f(x)$. Comme f est continue en x , $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x , par conséquent $f^{-1}(V) \in \mathcal{F}$ puisque \mathcal{F} raffine le filtre des voisinages de x , et donc $V \in f(\mathcal{F})$. Ainsi, $f(\mathcal{F})$ converge vers $f(x)$.

Intéressons-nous maintenant à la réciproque : soit V un ouvert contenant $f(x)$, et \mathcal{V} le filtre des voisinages de x . On sait que $f(\mathcal{V})$ converge vers $f(x)$, par conséquent $V \in f(\mathcal{V})$, ce qui signifie que $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}$, et donc $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x . Autrement dit, il existe un ouvert U contenant x et contenu dans $f^{-1}(V)$, c'est-à-dire un ouvert U tel que $f(U) \subseteq V$, et on vient de prouver que f est continue en x . \square

Continuons à avancer vers une preuve du théorème de Tychonoff ; pour cela il nous faut comprendre la convergence des filtres dans les espaces produits. La proposition suivante généralise aux filtres ce qu'on a déjà établi pour les suites.

Proposition B.12. *Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques, et $X = \prod X_i$ muni de la topologie produit. Un filtre \mathcal{F} sur X est convergent si, et seulement si, chacun des filtres image $\pi_i(\mathcal{F})$ est convergent.*

Preuve.

Notons déjà que, puisque chaque projection $\pi_i: X \rightarrow X_i$ est continue, on sait que $\pi_i(\mathcal{F})$ est convergent dès que \mathcal{F} l'est. Nous n'avons donc qu'une implication à démontrer.

Supposons maintenant que \mathcal{F} est un filtre sur X tel que chaque $\pi_i(\mathcal{F})$ converge vers $x_i \in X_i$. On va montrer que \mathcal{F} converge vers $x = (x_i)_{i \in I}$. Pour cela, fixons un voisinage de x , dont on peut supposer qu'il est de la forme

$$U = \{y \in X : \forall j \in J \pi_j(y) \in U_j\} ,$$

où $J \subseteq I$ est un ensemble fini et chaque U_j est un ouvert de X_j qui contient x_j .

Par hypothèse, on sait que chaque $\pi_i(\mathcal{F})$ converge vers x_i ; en particulier, pour tout $j \in J$ on doit avoir $U_j \in \pi_j(\mathcal{F})$, c'est-à-dire qu'il existe $V_j \in \mathcal{F}$ tel que $\pi_j(V_j) \subseteq U_j$. Introduisons $V = \bigcap_{j \in J} V_j$; comme \mathcal{F} est un filtre on sait que $V \in \mathcal{F}$, et de plus on a pour tout $j \in J$ que

$$\pi_j(V) \subseteq \pi_j(V_j) \subseteq U_j .$$

Ceci prouve que $V \subseteq U$, et donc $U \in \mathcal{F}$. On vient donc de prouver que tout voisinage de x appartient à \mathcal{F} , i.e que \mathcal{F} converge vers x . \square

Notons pour plus tard une caractérisation très utile de la convergence des ultrafiltres.

Proposition B.13. *Soit X un espace topologique, \mathcal{U} un ultrafiltre sur X et $x \in X$. Alors \mathcal{U} converge vers x si, et seulement si,*

$$x \in \bigcap \mathcal{A}, \text{ avec } \mathcal{A} = \{A \subset X : A \in \mathcal{U} \text{ et } A \text{ est fermé}\} .$$

Preuve.

Commençons par supposer que \mathcal{U} converge vers $x \in X$. Alors x appartient à A pour tout $A \in \mathcal{U}$, et on n'a donc essentiellement rien à prouver.

Réciproquement, supposons que x appartienne à l'intersection des éléments de \mathcal{U} qui sont fermés dans X , et fixons un ouvert V contenant x .

On veut montrer que V appartient à \mathcal{U} . Si ce n'est pas le cas, on sait que $X \setminus V$ doit appartenir à \mathcal{U} , puisque \mathcal{U} est un ultrafiltre. Comme $X \setminus V$ est fermé, on aboutit à une contradiction. \square

Encore un dernier effort pour arriver au théorème de Tychonoff : cette fois-ci il nous faut exprimer un critère de compacité en termes de filtre. Ce critère n'est valide qu'en présence de l'axiome du choix.

Proposition B.14. *Soit X un espace topologique séparé. Alors X est compact si, et seulement si, tout ultrafiltre sur X est convergent.*

Preuve.

Supposons tout d'abord que X n'est pas compact, et considérons un recouvrement (O_i) de X par des ouverts qui ne contiennent pas de sous-recouvrement fini. Alors la famille formée par les complémentaires des O_i est une base de filtre, et cette famille se trouve donc contenue (modulo l'axiome du choix) dans un ultrafiltre \mathcal{U} . Cet ultrafiltre ne peut converger vers aucun $x \in X$: en effet, pour tout $x \in X$ on a $x \in O_i$ pour au moins un $i \in I$, et comme $O_i \notin \mathcal{U}$ on voit que pour tout $x \in X$ il existe un voisinage de x qui n'appartient pas à \mathcal{U} , et donc \mathcal{U} ne converge pas vers x .

Réciproquement, supposons X compact, et considérons un ultrafiltre \mathcal{U} sur X . Alors la famille formée par les éléments de \mathcal{U} qui sont fermés dans X a la propriété d'intersections finies non vides (puisque \mathcal{U} est un filtre), et donc a une intersection non vide. Fixons x dans cette intersection ; la proposition B.13 dit exactement que \mathcal{U} converge vers x . \square

A vous maintenant de recoller les morceaux et de vous convaincre qu'on a bien tous les outils en main pour établirⁱⁱ le théorème de Tychonoff, dont l'énoncé est rappelé ci-dessous.

Théorème B.15. *Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques non vides, et $X = \prod X_i$ muni de la topologie produit. Alors X est compact si, et seulement si, chacun des X_i est compact.*

Notons qu'en fait le théorème de Tychonoff pour une famille d'espaces topologiques séparés X_i se trouve être plus faible que l'axiome du choix.

Exercices

Exercice B.16. Soit X un ensemble infini, I l'ensemble des parties finies de X . Pour tout $a \in I$ on définit

$$A_a = \{b \in I : a \subseteq b\}$$

Montrer que $\mathcal{F} = \{A_a : a \in I\}$ est un filtre non principal sur I .

ii. Avec l'axiome du choix!

Exercice B.17. On introduit l'espace $\beta\mathbb{N}$ des ultrafiltres sur \mathbb{N} , qu'on munit de la topologie produit de la topologie discrète sur $2^{\mathbb{N}}$; explicitement, une base d'ouverts pour cette topologie est donnée par les ensembles de la forme

$$\{\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} : A \in \mathcal{U}\}$$

où A est une partie de \mathbb{N} .

(1) Montrer que $\beta\mathbb{N}$, muni de cette topologie, est compact et que l'application $i: \mathbb{N} \rightarrow \beta\mathbb{N}$ qui à x associe $\{A \subseteq \mathbb{N} : x \in A\}$ est continue.

(2) On appelle *compactification* de \mathbb{N} un compact K tel que \mathbb{N} soit homéomorphe à une sous-partie dense de K . Montrer que pour toute compactification K de \mathbb{N} il existe une surjection continue de $\beta\mathbb{N}$ sur K .

(3) Montrer qu'en fait $\beta\mathbb{N}$ a la propriété universelle suivante : pour tout compact K , et toute application continue $f: \mathbb{N} \rightarrow K$, il existe une unique application $g: \beta\mathbb{N} \rightarrow K$ telle que $f = g \circ i$.

On appelle $\beta\mathbb{N}$ le *compactifié de Stone-Cěch* de \mathbb{N} .

Exercice B.18. Montrer qu'un ultrafiltre sur un ensemble X est la même chose qu'une mesure finiment additive $\mu: \mathcal{P}(X) \rightarrow \{0, 1\}$, c'est-à-dire une application μ définie sur $\mathcal{P}(X)$, prenant les valeurs 0 et 1, telle que $\mu(X) = 1$ et $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ pour toutes parties $A, B \subseteq X$ disjointes.

Exercice B.19. *Introduction aux ultraproducts.*

On utilise la définition d'un ultrafiltre donnée à l'exercice ci-dessus (mesure finiment additive).

1. Soit I un ensemble, μ un ultrafiltre sur I , et G_i une famille de groupes, d'élément neutre e_i . On définit $H \subseteq \prod G_i$ par

$$H = \{(g_i) : \mu(\{i \in I : g_i = e_i\}) = 1\}$$

Montrer que H est un sous-groupe distingué du groupe produit $\prod G_i$. On appelle *ultraproduit* des groupes G_i selon l'ultrafiltre μ le groupe quotient G/H .

2. On suppose cette fois-ci que les G_i sont des groupes munis d'une distance bi-invariante et bornée d_i (c'est-à-dire que $d_i(gkg', ghg') = d_i(k, h)$ pour tous g, g', h, k) et on considère l'ensemble

$$H' = \{(g_i) : \lim_{\mu} d_i(g_i, e_i) = 0\}.$$

(\lim_{μ} désigne la limite selon l'ultrafiltre μ).

Montrer que H' est un sous-groupe distingué de $\prod G_i$; par conséquent $(\prod G_i)/H'$ est naturellement un groupe, quotient de l'ultraproduit des G_i selon μ ; on

dit que ce groupe est l'ultraproduit des (G_i, d_i) selon μ (et si d_i est la distance discrète on retrouve l'ultraproduit du point 1).

3. Un cas particulier : on peut munir le groupe de permutation \mathcal{S}_n de la *distance de Hamming* d_n définie par

$$d_n(\sigma, \tau) = \frac{|\{i: \sigma(i) \neq \tau(i)\}|}{n} .$$

On dit qu'un groupe G est *sofique* s'il existe un ensemble I , un ultrafiltre μ et des entiers n_i tels que G soit isomorphe à un sous-groupe de l'ultraproduit des (\mathcal{S}_{n_i}, d_i) selon μ .

Montrer que \mathcal{S}_n est sofique pour tout n ; prouver que tout groupe fini est sofique.

4. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on considère la permutation $\tau_{n,i}$ de $\{1, \dots, n\}$ définie par

$$\tau_{n,i}(k) = k + i \ [n] .$$

L'application $i \mapsto \tau_{n,i}$ est un morphisme de \mathbb{Z} dans \mathcal{S}_n . En supposant qu'il existe un ultrafiltre non principal sur \mathbb{N} , montrer que \mathbb{Z} est sofique.

Avertissement : La question suivante est un problème ouvert...

5. Montrer que tout groupe est sofique.

Bibliographie

- [BK96] Howard Becker and Alexander S. Kechris. *The descriptive set theory of Polish group actions*, volume 232 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [Cho69] Gustave Choquet. *Cours d'analyse. Tome II : Topologie. Espaces topologiques et espaces métriques. Fonctions numériques. Espaces vectoriels topologiques*. Deuxième édition, revue et corrigée. Masson et Cie, Éditeurs, Paris, 1969.
- [Gao09] Su Gao. *Invariant descriptive set theory*. Pure and Applied Mathematics (Boca Raton). CRC Press, Boca Raton, FL, 2009.
- [Hal74] Paul R. Halmos. *Naive set theory*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1974. Reprint of the 1960 edition.
- [HR98] Paul Howard and Jean E. Rubin. *Consequences of the axiom of choice*, volume 59 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [Jec03] Thomas Jech. *Set theory : The third millennium edition, revised and expanded*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [Kec95] Alexander S. Kechris. *Classical descriptive set theory*, volume 156 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [KM] Kazimierz Kuratowski and Andrzej Mostowski. *Set theory, with an introduction to descriptive set theory*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.
- [Kri98] Jean-Louis Krivine. *Théorie des ensembles*. Nouvelle Bibliothèque mathématique. Cassini, Paris, 1998.
- [Mos06] Yiannis Moschovakis. *Notes on set theory*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, second edition, 2006.
- [Oxt80] John C. Oxtoby. *Measure and category*, volume 2 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1980.

- [Sri98] S.M. Srivastava. *A Course on Borel Sets*, volume 180 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [Wag85] Stan Wagon. *The Banach-Tarski paradox*, volume 24 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

Index

- G_δ , 37
- Γ_f , 70
- Π_ξ^0 , 66
- Σ_ξ^0 , 66
- $\beth_n(\kappa)$, 20
- $[X]^\kappa$, 19
- ω , 5
- σ -idéal, 41
- \sqcup , 17
- \mathcal{S}_∞ , 47
- $\mathcal{F}(X)$, 78
- $\mathcal{K}(X)$, 77

- arithmétique cardinale, 17
- arithmétique ordinaire, 8
- axiome d'extensionnalité, 102
- axiome de fondation, 105
- axiome de l'ensemble des parties, 103
- axiome de l'ensemble vide, 104
- axiome de l'infini, 105
- axiome de la paire, 104
- axiome de la réunion, 103
- axiome de Zermelo, 10
- axiome des choix dépendants, 16
- axiome du choix, 13
- axiome du choix dénombrable, 15

- Baire-mesurable, 42
- base d'ouverts, 28
- bon ordre, 2
- borélien standard, 75

- cardinal, 12
- cardinal de Hartogs, 13

- cofinalité d'un ordinal, 24
- coloriage d'un graphe, 87
- conjecture de Vaught, 82
- conjecture de Vaught topologique, 82

- distance, 27
- distance de Hausdorff, 77

- égalité modulo un idéal, 41
- ensemble analytique, 69
- ensemble coanalytique, 69
- ensemble comaigne, 42
- ensemble inductif, 13
- ensemble maigre, 42
- enveloppe, 85
- espace compact, 28
- espace complet, 28
- espace de Baire, 32
- espace de Cantor, 32
- espace métrique, 27
- espace métrique polonais, 48
- espace parfait, 61
- espace polonais, 37
- espace précompact, 28
- espace séparable, 28
- espace topologique, 27
- espace zéro-dimensionnel, 29
- espace métrisable, 27

- filtre, 107
- filtre de Fréchet, 107
- filtre image, 110
- filtre principal, 108
- fonction de choix, 13

- graphe, 87
- groupe complété, 52
- groupe d'isométries, 48
- groupe polonais, 47
- groupe topologique, 47

- hiérarchie borélienne, 65
- homéomorphisme, 28
- hypothèse du continu, 18

- inégalité triangulaire, 27
- isométrie, 28

- Lemme de Zermelo, 13
- lemme de Zorn, 13

- morphisme de graphes, 87

- ordinal, 4
- ordinal fini, 5
- ordinal limite, 5
- ordinal successeur, 5
- ordre dense, 23
- ordre lexicographique, 80
- oscillation, 38

- partie \mathcal{G} -discrète, 87
- partie universellement mesurable, 86
- plongement isométrique, 28
- point isolé, 61

- récurrence transfinie, 6
- rétract, 34
- relation d'équivalence engendrée par
un graphe, 88
- relation ergodique, 88
- relation fonctionnelle, 102

- sélecteur borélien, 82
- schéma d'axiomes de compréhension,
103
- schéma d'axiomes de remplacement,
103

- schéma de Cantor, 62
- schéma de Lusin, 63
- segment initial, 2
- structure borélienne d'Effros, 79

- Théorème de Baire, 40
- théorème de Feldman-Moore, 91
- théorème de Kuratowski-Mycielski, 92
- théorème de Laverentiev, 39
- théorème de Lusin-Novikov, 89
- théorème de Nikodym, 85
- théorème de séparation, 71
- théorème de Silver, 91
- théorème de Suslin, 72
- topologie de Vietoris, 77
- topologie produit, 29

- ultrafiltre, 108
- ultraproduit, 109
- uniformisation borélienne, 91
- univers, 101