# Analyse fonctionnelle 1

2026-2027

Les notes qui suivent correspondent aux cours d'Analyse Fonctionnelle 1 donnés entre le 1er septembre et le 2 novembre 2026 (total de 12h de cours, soit la moitié du volume horaire théorique de l'UE). Ce document suit à peu près fidèlement ce que j'avais prévu de faire au tableau avant chaque séance de cours (le contenu réel en a sans doute un peu divergé suite à des questions etc., mais je n'en ai pas de trace écrite). L'espoir est que cela vous aide à travailler ce cours ; un certain nombre d'arguments méritent d'être détaillés et complétés.

# Chapitre 1

# Rappels sur la complétude et la compacité

Une bonne partie des énoncés dans ce premier chapitre sont écrits sans preuve : cela signifie qu'il faudrait savoir les démontrer.

**Définition 1.1**

*Soit $(X, d)$ un espace métrique et $(u_n)_n$ une suite d'éléments de $X$. On dit que $(u_n)_n$ est* de Cauchy *si*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n, m \geq N, \qquad d(u_n, u_m) \leq \varepsilon.$$

**Résultats à connaître et savoir démontrer :**

- Toute suite convergente est de Cauchy.
- Toute suite de Cauchy est bornée.
- Si $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy et $x$ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_n$, alors $(u_n)_n$ converge vers $x$.

**Définition 1.2**

*Un espace métrique $(X, d)$ est* complet *si toute suite de Cauchy de $(X, d)$ converge dans $X$.*

**Exemple 1.3.** $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, et plus généralement tout espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dimension finie est complet.

**Théorème 1.4**

*Soit $(X, d)$ un espace métrique et $Y \subseteq X$.*

*(i) Si $(Y, d)$ est complet, alors $Y$ est fermé dans $X$.*

*(ii) Si $(X, d)$ est complet et $Y$ est fermé dans $X$, alors $(Y, d)$ est complet.*

**Exemple 1.5.** $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ n'est pas complet.

Notons que tout espace métrique compact est complet, puisque toute suite y admet une valeur d'adhérence et qu'une suite de Cauchy avec une valeur d'adhérence converge.

## 1.1 Quelques exemples d'espaces vectoriels normés complets

Soit $X$ un espace métrique. Considérons

$$B(X,\mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ est bornée}\},$$
$$C_b(X,\mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ est continue et bornée}\}.$$

On les munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\}.$$

Ce sont deux espaces de Banach ; rappelons que $\|\cdot\|_\infty$ induit la norme de la convergence uniforme, et que si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers $f$, alors $f$ est continue. Donc $C_b(X,\mathbb{R})$ est fermé dans $B(X,\mathbb{R})$. Par conséquent, il nous suffit de prouver que $B(X,\mathbb{R})$ est complet.

Pour cela, considérons une suite de Cauchy $(f_n)_n$ dans $(B(X,\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$. Alors :

(1) Pour tous $n,m \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$, on a

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty.$$

Donc $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(\mathbb{R},|\cdot|)$ et converge par conséquent vers une limite. Appelons cette limite $f(x)$.

(2) $f$ est bornée. Fixons $\varepsilon = 1$. Puisque $(f_n)_n$ est de Cauchy, il existe $N$ tel que

$$\forall n,m \geq N \quad \|f_n - f_m\|_\infty \leq 1.$$

Puisque $f \in B(X,\mathbb{R})$, il existe $R > 0$ tel que $|f_N(x)| \leq R$ pour tout $x \in X$. On a donc

$$\forall n \geq N,\ \forall x \in X, \quad |f_n(x) - f_N(x)| \leq 1.$$

Grâce à l'inégalité triangulaire,

$$\forall n \geq N,\ \forall x \in X, \quad |f_n(x)| \leq 1 + |f_N(x)| \leq 1 + R.$$

En faisant tendre $n$ vers $+\infty$, on obtient $\|f\|_\infty \leq R + 1$.

(3) Montrons que $\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$ lorsque $n \to +\infty$. Pour cela, fixons $\varepsilon > 0$. Il existe $N$ tel que

$$\forall n,m \geq N,\ \forall x \in X, \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$$

À $n$ et $x$ fixés, en faisant tendre $m$ vers $+\infty$, on obtient

$$\forall n \geq N,\ \forall x \in X, \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Autrement dit $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$.

En particulier, si $K$ est compact, alors $(C(K,\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$ est complet.

Remarquons qu'on aurait pu remplacer $\mathbb{R}$ par n'importe quel espace de Banach, voire n'importe quel espace métrique complet $(Y,d)$ en introduisant une variante de $\|\cdot\|_\infty$ : la distance du sup entre deux fonctions bornées, définie par

$$d_{\sup}(f,g) = \sup\{d(f(x),g(x)) \mid x \in X\}.$$

Avant de passer à un autre exemple important, rappelons une définition.

**Théorème 1.6 (*Applications linéaires continues*)**

*Soient $X, Y$ deux espaces vectoriels normés et $f : X \to Y$ une application linéaire. Alors $f$ est continue si et seulement si*

$$\|f\| := \sup\{\|f(x)\|_Y : x \in B_X(0,1)\}$$

*est fini. On note $\mathcal{L}(X,Y)$ l'espace des applications linéaires continues de $X$ vers $Y$ ; alors $(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé.*

Rappelons aussi que, pour tout $x \in X$, on a

$$\|f(x)\|_Y \leq \|f\| \, \|x\|_X .$$

Il est courant d'écrire cette norme (dite "norme d'opérateur") avec trois barres. Je vous en épargne une dans ces notes.

**Théorème 1.7**

*Soient $X, Y$ deux espaces vectoriels normés. Si $Y$ est un Banach, alors $(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|)$ aussi.*

Il faut savoir faire cette démonstration !

En particulier, pour $Y = \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, corps de base de tous nos espaces vectoriels normés), on obtient que le *dual topologique* $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ est un Banach.

**Théorème 1.8 (*Complété d'un espace métrique*)**

*Soit $(X,d)$ un espace métrique. Il existe un espace de Banach $Z$ et une isométrie $\varphi : X \to Z$.*
*En particulier, $\overline{\varphi(X)}$ est un espace complet dans lequel $X$ (identifié à $\varphi(X)$) est dense ; on appelle un tel espace métrique complet un* complété *de $(X,d)$.*

*Démonstration.* Il suffit de considérer $Z = C_b(X, \mathbb{R})$ (ou $B(X, \mathbb{R})$). Fixons $x_0 \in X$ (si $X$ est vide, il n'y a rien à faire). Puis posons

$$\varphi(x)(y) = d(x,y) - d(y, x_0).$$

Alors :

- Pour tout $x \in X$, la fonction $\varphi(x)$ est continue (et même 1-lipschitzienne).
- pour tout $y \in X$, $|\varphi(x)(y)| \leq d(x, x_0)$, donc $\varphi(x)$ est bornée.
- pour tous $x_1, x_2, y \in X$,

$$|\varphi(x_1)(y) - \varphi(x_2)(y)| = |d(x_1,y) - d(x_2,y)| \leq d(x_1, x_2).$$

  Cette inégalité est une égalité pour $y = x_2$.

Donc $\|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\|_\infty = d(x_1, x_2)$. □

On va voir un peu plus loin en quel sens une complétion est unique. Avant cela, on a besoin de rappeler un théorème fondamental.

**Théorème 1.9 (*Prolongement des applications uniformément continues*)**

*Soient $X, Y$ deux espaces métriques, $Y$ complet, et $A \subseteq X$. Soit $f : A \to Y$ une application uniformément continue. Alors il existe une unique application continue*

$$\widetilde{f} : \overline{A} \longrightarrow Y$$

*qui prolonge $f$. De plus, $\widetilde{f}$ est uniformément continue.*

*Démonstration.* L'unicité est claire : si $g_1, g_2$ sont continues et égales sur $A$, alors elles sont égales sur $\overline{A}$ puisque $\{x \mid g_1(x) = g_2(x)\}$ est fermé.

Pour l'existence, remarquons que si $(a_n)_n$ est de Cauchy dans $X$, alors $(f(a_n))_n$ est de Cauchy dans $Y$. Démontrons-le : soit $\varepsilon > 0$. Comme $f$ est uniformément continue, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall a, a' \in A, \quad d(a, a') \leq \delta \implies d(f(a), f(a')) \leq \varepsilon.$$

Comme $(a_n)_n$ est de Cauchy, il existe $N$ tel que

$$n, m \geq N \quad \implies \quad d(a_n, a_m) \leq \delta,$$

donc $d(f(a_n), f(a_m)) \leq \varepsilon$.

En particulier, si $(a_n)_n$ est une suite d'éléments de $A$ qui converge vers $x \in \overline{A}$, alors $(f(a_n))_n$ converge puisque $Y$ est complet ; cette limite est la même pour toute autre suite de $A$ convergeant vers $x$ (pourquoi ?).

On peut donc poser

$$\widetilde{f}(x) = \lim_{n \to +\infty} f(a_n).$$

Reste à montrer que $\widetilde{f}$ est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall a, a' \in A, \quad d(a, a') \leq \delta \implies d(f(a), f(a')) \leq \varepsilon.$$

Soient $x, x' \in \overline{A}$ tels que $d(x, x') < \delta$. Choisissons $a_n \to x$ et $a'_n \to x'$ dans $A$. Pour $n$ grand, $d(a_n, a'_n) < \delta$, donc $d(f(a_n), f(a'_n)) \leq \varepsilon$. En passant à la limite, on obtient $d(\widetilde{f}(x), \widetilde{f}(x')) \leq \varepsilon$. □

Les deux énoncés importants suivants ont été laissés en exercice.

**Exemple 1.10.**

- Si $A$ est un sous-espace vectoriel dense d'un espace vectoriel normé $X$, et si $T : A \to Y$ est linéaire et continue, avec $Y$ un espace de Banach, alors $T$ se prolonge uniquement en une application linéaire continue $\widetilde{T} : X \to Y$. De plus, $\left\|\widetilde{T}\right\| = \|T\|$.
- Si $f : A \to Y$ est une isométrie et $Y$ complet, alors $f$ se prolonge en une isométrie de $\overline{A}$ dans $Y$. De plus, ce prolongement est surjectif si et seulement si $f(A)$ est dense dans $Y$.

En particulier, si $f : X \to Y$ et $g : X \to Z$ sont deux isométries d'image dense, avec $Y, Z$ complets, alors $g \circ f^{-1} : f(X) \to g(X)$ est une isométrie d'image dense ; son prolongement donne une isométrie $\varphi$ de $Y$ vers $Z$. De même $\psi = f \circ g^{-1}$ est une isométrie de $Z$ vers $Y$. Par définition, pour tout $y \in Y$ on a $\psi(\varphi(y)) = y$, et de même $\varphi(\psi(z)) = z$ pour tout $z \in Z$. On en déduit que $Y$ et $Z$ sont isométriques.

Cela nous dit en quel sens un complété est unique : si $X \subseteq Y$ et $X \subseteq Z$, avec $Y$ et $Z$ métrique complets dans lesquels $X$ est dense, alors il existe une isométrie surjective $\varphi \colon Y \to Z$ telle que $\varphi(x) = x$ pour tout $x \in X$.

### 1.1.1 Les espaces $\ell^p$

Un autre exemple important : soit $p \in [1, +\infty]$ et $(x_n)$ une suite de réels ou de complexes.

- Si $p < +\infty$, on pose
$$\|x\|_p = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} |x(n)|^p \right)^{1/p}.$$
- Si $p = +\infty$, on pose
$$\|x\|_\infty = \sup \{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}.$$

On note

$$\ell^p(\mathbb{K}) = \left\{x : \|x\|_p < +\infty\right\}.$$

Alors $\ell^p(\mathbb{K})$ est un espace de Banach. Pour $p = +\infty$, on l'a déjà montré (pourquoi ?). On l'admet pour $p \in [1, +\infty[$ ; le plus délicat est en fait de montrer que $\|\cdot\|_p$ satisfait l'inégalité triangulaire (*inégalité de Minkowski*).

Finissons ces rappels sur la complétude par une caractérisation des espaces de Banach.

**Théorème 1.11 (*Caractérisation des espaces de Banach*)**

*Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

*(i) $X$ est un Banach.*

*(ii) Si $\sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\| < +\infty$, alors la série $\sum x_n$ converge dans $X$.*

On retrouve la propriété bien connue de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ : « toute série absolument convergente est convergente ».

*Démonstration.* **(i) ⇒ (ii).** Si $\sum \|x_n\| < +\infty$, montrons que la suite des sommes partielles $(\sum_{n=0}^{p} x_n)_p$ est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$ ; il existe $N$ tel que $\sum_{n=N}^{+\infty} \|x_n\| \leq \varepsilon$.

Alors pour tous $q > p \geq N$,

$$\left\|\sum_{n=0}^{q} x_n - \sum_{n=0}^{p} x_n\right\| = \left\|\sum_{n=p+1}^{q} x_n\right\| \leq \sum_{n=p+1}^{q} \|x_n\| \leq \varepsilon.$$

Puisque $X$ est un Banach, la suite des sommes partielles converge (on vient de montrer qu'elle est de Cauchy), autrement dit $\sum x_n$ converge.

**(ii) ⇒ (i).** Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy. On peut (exercice, voir ci-dessous) en extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ telle que

$$\forall n, \quad \left\|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\right\| \leq 2^{-n}.$$

Alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left\|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\right\| < +\infty,$$

donc, par (ii), $(\sum_{n=0}^{p} (x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}))_p$ converge. Autrement dit, $(x_{\varphi(p)})_p$ converge. Donc $(x_n)_n$ a une valeur d'adhérence ; comme c'est une suite de Cauchy, elle converge. □

On a utilisé un cas particulier du lemme suivant, laissé en exercice.

**Lemme 1.12**

*Soit $r : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+^*$ une suite quelconque de réels strictement positifs, et $(x_n)_n$ une suite de Cauchy. Alors il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ telle que*

$$\forall n, \quad \left\|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\right\| \leq r(n).$$

## 1.2 Rappels sur la compacité

Un espace métrique $(X, d)$ est compact s'il satisfait l'une des deux conditions équivalentes ci-dessous :

(i) De toute suite d'éléments de $(X, d)$, on peut extraire une sous-suite convergente.

(ii) Tout recouvrement ouvert de $(X, d)$ admet un sous-recouvrement fini.

Je ne reviens pas sur tous les théorèmes vus en L3 sur la compacité.

**Attention.** Dans $\mathbb{R}^n$, ou dans un espace vectoriel normé de dimension finie, compact = fermé et borné. C'est faux en dimension infinie : la boule unité fermée d'un espace vectoriel normé $X$ est compacte si, et seulement si, $X$ est de dimension finie (voir TD).

**Théorème 1.13 (*Compacité d'un produit dénombrable*)**

*Soit $(X_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques compacts. Alors $Z = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$, muni d'une distance produit, est compact.*

Rappelons qu'une distance produit sur $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ est une distance $d$ telle que

$$(x_i)_i \longrightarrow x \text{ dans } (X, d) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall n,\ x_i(n) \longrightarrow x(n) \text{ dans } (X_n, d_n).$$

Par exemple, $d$ définie par

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \min(1, d_n(x(n), y(n)))$$

est une distance produit.

*Démonstration.* On peut supposer tous les $X_n$ non vides (sans quoi le produit est vide et il n'y a rien à faire). Soit $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $Z$.

Comme $X_0$ est compact, et $(z_i(0))_i$ est une suite d'éléments de $X_0$, on peut trouver une extractrice $\varphi_0$ telle que $z_{\varphi_0(i)}(0))$ converge vers $\ell_0 \in X_0$.

De même, $(z_{\varphi_0(i)}(1))_i$ est une suite d'éléments du compact $X_1$, et on en extrait une sous-suite $(z_{\varphi_0(\varphi_1(i))}(1))_i$ qui converge vers $\ell_1 \in X_1$.

En répétant ce raisonnement, on obtient une suite de fonctions strictement croissantes $\varphi_k \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que, pour tout $k$, la suite $(z_{\varphi_0(\dots\varphi_k(i))}(k))_i$ converge vers $\ell_k$.

Posons $\psi(i) = \varphi_0(\varphi_1(\dots(\varphi_i(i)))$. Montrons que $\psi$ est strictement croissante : pour tout $i$, on a

$$\begin{aligned}
\psi(i+1) &= \varphi_0(\varphi_1(\dots(\varphi_i(\varphi_{i+1}(i+1))))\\
&\geq \varphi_0(\varphi_1(\dots(\varphi_i(i+1))))\\
&> \varphi_0(\varphi_1(\dots(\varphi_i(i))))\\
&= \psi(i).
\end{aligned}$$

Pour obtenir les inégalités ci-dessus, on a utilisé que toutes les $\varphi_i$ sont strictement croissantes ainsi que le fait que, pour tout $i$ et $j$, $\varphi_{i+1}(j) \geq j$ parce que $\varphi_{i+1}$ est strictement croissante.

Donc $\psi$ est strictement croissante. Fixons $k \in \mathbb{N}$ ; pour tout $i > k$ on a $\psi(i) = \varphi_0(\varphi_1(\dots\varphi_k(\psi_k(i))))$, avec $\psi_k(i) = \varphi_k(\varphi_{k+1}(\dots\varphi_i(i)))$. Le même raisonnement que ci-dessus montre que $\psi_k$ est strictement croissante. Cela prouve que la suite $(z_{\psi(i)}(k))_{i>k}$ est une suite extraite de $(z_{\varphi_0(\dots\varphi_k(i))}(k))_i$, qui converge vers $\ell_k$ par construction.

Par conséquent, $(z_{\psi(i)}(k))_i$ converge vers $\ell_k$ pour tout $k$, ce qui prouve que $(z_{\psi(i)})_i$ converge dans $Z$. On vient de prouver que toute suite d'éléments de $Z$ admet une suite extraite convergente : $Z$ est compact. □

Il est particulièrement intéressant d'étudier $C(X,\mathbb{R})$ (ou $C(X,\mathbb{C})$) quand $(X,d)$ est compact. C'est ce qu'on va faire pour finir ce chapitre. Commençons par un résultat sans doute déjà connu qui concerne le cas particulier où $X$ est un segment dans $\mathbb{R}$.

**Théorème 1.14 (*Weierstrass*)**

*Les fonctions polynomiales sont denses dans* $(C([0,1],\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$.

*Démonstration.* On fixe $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue (le cas à valeurs dans $\mathbb{C}$ est similaire), et $\varepsilon>0$. On considère le polynôme de Bernstein

$$B_n(f)(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Pour $x\in[0,1]$ fixé, on considère une suite $(X_k)_{k\geq 1}$ de variables aléatoires de Bernoulli i.i.d, de paramètre $x$ :

$$\mathbb{P}(X_k=1)=x,\qquad \mathbb{P}(X_k=0)=1-x.$$

Considérons $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$ (loi binomiale) et $T_n=\frac{1}{n}S_n$. Alors

$$\mathbb{P}(S_n=k)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},\quad k\in\{0,\dots,n\},$$

On connaît (ou on retrouve facilement) les formules suivantes :

$$\mathbb{E}(S_n)=nx,\quad \mathrm{Var}(S_n)=nx(1-x),\quad \mathbb{E}(T_n)=x,\quad \mathrm{Var}(T_n)=\frac{x(1-x)}{n}.$$

La variable aléatoire $f(T_n)$ est à valeurs dans $\{f(k/n):0\leq k\leq n\}$, et on obtient par le théorème de transfert

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(T_n))&=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\mathbb{P}\left(T_n=\frac{k}{n}\right)\\&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right)=B_n(f)(x).\end{aligned}$$

On a alors, pour tout $x\in[0,1]$,

$$\begin{aligned}|f(x)-B_n(f)(x)|&=\left|\mathbb{E}(f(x))-\mathbb{E}(f(T_n))\right|\\&\leq\mathbb{E}(|f(x)-f(T_n)|).\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon>0$. Comme $f$ est continue sur un compact, elle est uniformément continue : il existe $\delta>0$ tel que

$$|x-x'|\leq\delta\quad\Longrightarrow\quad|f(x)-f(x')|\leq\varepsilon.$$

On a, pour $x\in[0,1]$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|f(x)-f(T_n)|)&\leq\mathbb{P}(|x-T_n|\leq\delta)\,\varepsilon+\mathbb{P}(|x-T_n|>\delta)\,2\|f\|_\infty\\&\leq\varepsilon+2\,\mathbb{P}(|x-T_n|>\delta)\,\|f\|_\infty.\end{aligned}$$

Puisque $\mathbb{E}(T_n) = x$, l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev donne

$$\mathbb{P}(|x - T_n| > \delta) = \mathbb{P}(|T_n - \mathbb{E}(T_n)| > \delta) \leq \frac{\mathrm{Var}(T_n)}{\delta^2} = \frac{x(1-x)}{n\delta^2}.$$

Finalement, pour tout $x \in [0,1]$,

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{n\delta^2} \leq 2\varepsilon \quad \text{pour } n \text{ grand.}$$

Donc $B_n(f)$ converge uniformément vers $f$. □

On peut grandement généraliser le théorème de Weierstrass ; pour énoncer cette généralisation on a besoin d'un peu de vocabulaire.

**Définition 1.15**

*Soit $A \subseteq C(X, \mathbb{R})$. On dit que $A$ est une* algèbre *unitaire si :*

*(i) $A$ est un sous-espace vectoriel ;*

*(ii) la fonction constante égale à $1$ appartient à $A$ ;*

*(iii) pour tous $f, g \in A$, on a $fg \in A$.*

Le mot "unitaire" est là pour dire que $A$ contient la fonction constante égale à $1$, qui est l'élément neutre pour la multiplication.

**Définition 1.16**

*On dit que $A$* sépare les points *si*

$$\forall x, x' \in X, \quad x \neq x' \quad \Longrightarrow \quad \exists f \in A, \quad f(x) \neq f(x').$$

Un exemple fondamental est l'algèbre des fonctions polynomiales de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, pour $[a,b]$ un segment.

**Théorème 1.17 (*Théorème de Stone–Weierstrass*)**

*Soit $(X,d)$ un espace métrique compact et $A$ une sous-algèbre unitaire de $C(X,\mathbb{R})$ qui sépare les points. Alors $A$ est dense dans $(C(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.*

Ce résultat est admis (une preuve est proposée dans un exercice de TD).

Pour donner une application du théorème de Stone–Weierstrass, on va l'utiliser pour démontrer le résultat important qui suit (notons tout de même que ce résultat admet d'autres preuves).

**Théorème 1.18**

*Soit $(X,d)$ un espace métrique compact. Alors $(C(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est séparable.*

On rappelle qu'un espace métrique est *séparable* s'il admet un sous-ensemble dénombrable dense ; tout compact métrique est par exemple séparable, voir TD (autre exemple important : tout evn de dimension finie est séparable).

*Démonstration.* Puisque $(X,d)$ est compact métrique, il est séparable, et on peut donc fixer un sous-ensemble au plus dénombrable et dense $\{x_n : n \in \mathbb{N}^*\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ notons $f_n$ la fonction $x \mapsto d(x, x_n)$.

Chaque $f_n$ est continue ; de plus, si $x \neq y \in X$ alors (par densité) il existe $n$ tel que $d(x,x_n) < d(x,y)/3$, et l'inégalité triangulaire nous assure alors que $d(y,x_n) > \frac{2}{3} d(x,y)$, en particulier $f_n(x) \neq f_n(y)$.

Notons $f_0$ la fonction constante égale à 1, et $A$ la sous-algèbre de $C(X,\mathbb{R})$ engendrée par $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$. Alors $A$ est une sous-algèbre unitaire, qui sépare les points d'après ce qu'on a écrit au paragraphe précédent. Par conséquent, $A$ est dense dans $(C(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Tout élément $f$ de $A$ s'écrit sous la forme

$$f = \sum_{J\in\Omega} \lambda_j \prod_{j\in J} f_j$$

où $\Omega$ est un ensemble fini de parties finies de $\mathbb{N}$, et chaque $\lambda_j$ est dans $\mathbb{R}$ (c'est une façon condensée de dire que les éléments de $A$ sont les combinaisons linéaires de produits finis d'éléments de $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$).

Il suit de cela que l'ensemble $A'$ formé par les fonctions qui s'écrivent sous la forme $\sum_{J\in\Omega} \lambda_j \prod_{j\in J} f_j$ avec des $\lambda_j$ *rationnels* est dense dans $(A, \|\cdot\|_\infty)$, donc aussi dans $(C(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Comme l'ensemble des parties finies d'un ensemble dénombrable est dénombrable, on conclut des propriétés de la dénombrabilité que $A'$ est lui-même dénombrable. On vient de montrer que $(C(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ admet un sous-ensemble dénombrable dense, autrement dit que $(C(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est séparable. □

Note : il serait bon de connaître et comprendre l'énoncé du théorème précédent. La preuve pose peut-être des difficultés de "comptage" (propriétés des ensembles dénombrables) ; admettre ce résultat ne créera pas de difficultés pour comprendre la suite du cours.

## 1.3 Compacité dans les espaces de fonctions

On voudrait maintenant caractériser les parties compactes des espaces $C(K,Y)$, munis de $d_\infty$. Déjà, si $A \subseteq C(K,Y)$ est compact, alors $A$ est fermé.

**Définition 1.19**

*Une partie $A \subseteq (X,d)$ est* relativement compacte *si $\overline{A}$ est compacte.*

Cela revient à dire que toute suite d'éléments de $A$ admet une sous-suite extraite qui converge dans $X$ (exercice !). On souhaite donc identifier les parties relativement compactes de $C(K,Y)$.

**Première condition.** Pour tout $x \in K$, l'évaluation

$$\begin{array}{ccc} C(K,Y) & \longrightarrow & Y \\ f & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

est continue. Donc si $A$ est compact, $\{f(x) : f \in A\}$ est compact ; par conséquent, si $A$ est relativement compact, alors $\{f(x) : f \in A\}$ est relativement compact pour tout $x \in K$.

**Deuxième condition.** Fixons $\varepsilon > 0$. Comme $A$ est compact, on peut le recouvrir par un nombre fini de boules $B(f_i, \varepsilon)$ (on dit que $A$ est *précompact*). Chaque $f_i$ est continue : il existe $\delta_i > 0$ tel que, pour $x, x' \in K$,

$$d(x,x') \leq \delta_i \implies d(f_i(x), f_i(x')) \leq \varepsilon.$$

Soit $\delta = \min_i \delta_i > 0$ ; pour $f \in A$, puis $x, x' \in K$ tels que $d(x,x') \leq \delta$, on a

$$\begin{aligned} d(f(x), f(x')) &\leq d(f(x), f_i(x)) + d(f_i(x), f_i(x')) + d(f_i(x'), f(x')) \\ &\leq 2\|f - f_i\|_\infty + \varepsilon \leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

On vient de montrer que si $A \subseteq C(K)$ est compact, alors $A$ est *équicontinu*, au sens de la définition suivante.

**Définition 1.20**

*Une partie $A \subseteq C(K,Y)$ est* équicontinue en $x$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall f \in A,\ \forall x' \in K, \quad d(x,x') \leq \delta \implies d(f(x),f(x')) \leq \varepsilon.$$

*Informellement : étant donné $\varepsilon > 0$, $\delta$ peut être choisi indépendamment de $f$.*
*La partie $A$ est* uniformément équicontinue *si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall f \in A,\ \forall x, x' \in K, \quad d(x,x') \leq \delta \implies d(f(x),f(x')) \leq \varepsilon.$$

*Cette fois, $\delta$ est indépendant à la fois de $f$ et de $x$.*

**Théorème 1.21**

*Soit $K$ compact et $A \subseteq C(K,Y)$ équicontinue. Alors $A$ est uniformément équicontinue.*

Pour $A = \{f\}$, on retrouve le théorème de Heine.

*Démonstration.* Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in K$, il existe $\delta_x > 0$ tel que

$$\forall f \in A,\ \forall x' \in K, \quad d(x,x') \leq \delta_x \implies d(f(x),f(x')) \leq \varepsilon.$$

La famille $\left(B(x,\delta_x/2)\right)_{x\in K}$ recouvre $K$ : on en extrait un sous-recouvrement fini,

$$K = \bigcup_{i=1}^{n} B\left(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2}\right).$$

Posons $\delta = \min\limits_{1\leq i\leq n} \delta_{x_i}/2 > 0$. Soient $x, x' \in K$ tels que $d(x,x') < \delta$. Il existe $i$ tel que $x \in B(x_i, \delta_{x_i}/2)$ ; donc

$$d(x_i,x) < \frac{\delta_{x_i}}{2}, \qquad d(x_i,x') \leq d(x_i,x) + d(x,x') < \frac{\delta_{x_i}}{2} + \delta \leq \delta_{x_i}.$$

Par l'inégalité triangulaire,

$$\forall f \in A, \quad d(f(x),f(x')) \leq 2\varepsilon.$$

Donc $A$ est uniformément équicontinue. □

On a identifié deux conditions nécessaires de relative compacité ; on va maintenant montrer qu'elles sont suffisantes.

Un point clé est le lemme suivant.

**Lemme 1.22**

*Soient $X, Y$ deux espaces métriques, $X$ compact, et $(f_n)_n \in C(X,Y)^{\mathbb{N}}$ une famille uniformément équicontinue. Soit $D$ une partie dense de $X$ telle que, pour tout $x \in D$, $(f_n(x))_n$ est de Cauchy dans $Y$. Alors $(f_n)_n$ est de Cauchy dans $(C(X,Y), d_\infty)$.*

*Démonstration.* Soit $\varepsilon > 0$. Par uniforme équicontinuité, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x, x' \in X,\ \forall n, \quad d(x,x') \leq \delta \implies d(f_n(x),f_n(x')) \leq \varepsilon.$$

Comme $D$ est dense dans $X$, on a $X = \bigcup\limits_{x\in D} B(x,\delta)$ ; par compacité, on peut écrire

$$X = \bigcup_{i=1}^{p} B(x_i,\delta), \qquad x_i \in D.$$

Chaque suite $(f_n(x_i))_n$ est de Cauchy ; on peut donc trouver $N$ tel que

$$\forall n, m \geq N,\ \forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad d(f_n(x_i), f_m(x_i)) \leq \varepsilon.$$

Soit $x \in X$ et $n, m \geq N$.. Choisissons $i$ tel que $d(x, x_i) < \delta$ ; alors

$$\begin{aligned} d(f_n(x), f_m(x)) &\leq d(f_n(x), f_n(x_i)) + d(f_n(x_i), f_m(x_i)) + d(f_m(x_i), f_m(x)) \\ &\leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

La majoration ne dépend pas de $x$ ; la suite $(f_n)_n$ est donc de Cauchy pour $d_\infty$. □

**Théorème 1.23 (*Ascoli*)**

*Soient $X, Y$ deux espaces métriques, avec $X$ compact, et soit $A \subseteq (C(X,Y), d_\infty)$. Alors $A$ est relativement compact si et seulement si :*

*(i) Pour tout $x \in X$, l'ensemble $\{f(x) : f \in A\}$ est relativement compact dans $Y$ ;*

*(ii) $A$ est équicontinue.*

*Démonstration.* Les conditions nécessaires ont été établies plus haut. Supposons (i) et (ii) et soit $(f_n)_n$ une suite d'éléments de $A$. Comme $X$ est compact, il est séparable. Fixons une partie dénombrable dense $D = \{x_p : p \in \mathbb{N}\}$.

Pour tout $p$, notons

$$Y_p = \overline{\{f_n(x_p) : n \in \mathbb{N}\}},$$

qui est compact par hypothèse. Ainsi le produit

$$Z = \prod_{p=0}^{+\infty} Y_p$$

est compact. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $z_n$ l'élément de $Z$ tel que $z_n(p) = f_n(x_p)$. Comme $Z$ est compact, il existe une extraction strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(z_{\varphi(n)})_n$ converge dans $Z$. Cela revient à dire que, pour tout $p$, $\left(f_{\varphi(n)}(x_p)\right)_n$ converge dans $Y_p$.

En particulier, $(f_{\varphi(n)}(x))_n$ est de Cauchy pour tout $x \in D$. Par le lemme précédent, $(f_{\varphi(n)})_n$ est de Cauchy dans $(C(X,Y), d_\infty)$.

Cela implique en particulier que $(f_{\varphi(n)}(x))_n$ est de Cauchy pour tout $x \in X$. Or $\overline{\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}}$ est compact, donc complet ; ainsi $(f_{\varphi(n)}(x))_n$ converge pour tout $x \in X$, vers une valeur notée $f(x)$.

Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque $(f_{\varphi(n)})_n$ est de Cauchy dans $(C(X,Y), d_\infty)$, on sait qu'il existe $N$ tel que $d_\infty(f_{\varphi(n)}, f_{\varphi(m)}) \leq \varepsilon$ pour tout $n, m \geq N$. Autrement dit :

$$\forall n, m \geq N,\ \forall x \in X, \quad d(f_{\varphi(n)}(x), f_{\varphi(m)}(x)) \leq \varepsilon.$$

En faisant tendre $m$ vers $+\infty$ à $n$ et $x$ fixés, on conclut que $(f_{\varphi(n)})_n$ converge uniformément vers $f$. Par conséquent $f$ est continue, et c'est une valeur d'adhérence de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On vient d'établir que toute suite d'éléments de $A$ admet une valeur d'adhérence de $(C(X,Y), d_\infty)$ ; cela revient à dire que $A$ est relativement compact. □

# Chapitre 2

# Espaces de Hilbert

Rappelons la définition d'un produit scalaire complexe.

**Définition 2.1**

*Un produit scalaire sur un $\mathbb{C}$-ev $E$ est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que :*

- $\forall y \in E$, $x \longmapsto \langle x, y \rangle$ *est $\mathbb{C}$-linéaire ;*
- $\forall x, y \in E$, $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ *;*
- $\forall x \in E$, $\langle x, x \rangle \geq 0$, *et* $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.

*On dit que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace* préhilbertien *(complexe).*

**Remarque.** $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est alors $\mathbb{R}$-bilinéaire. On pourrait aussi traiter le cas réel, où le produit scalaire est plus simple (et beaucoup de théorèmes qui vont suivre peuvent se déduire du cas réel).

On ne peut pas demander à la fois $\langle ix, ix \rangle > 0$ si $x \neq 0$ et la $\mathbb{C}$-bilinéarité : en effet on a

$$\langle ix, ix \rangle = i^2 \langle x, x \rangle = -\langle x, x \rangle.$$

Les propriétés sont modelées sur celles de $(x, y) \mapsto x\overline{y}$ dans $\mathbb{C}$ ; notre convention est que le produit scalaire est antilinéaire en la seconde variable, mais l'autre convention est également très commune.

**Exemples :** $\mathbb{C}^n$, avec $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}$ ; $\ell^2$, avec $\langle x, y \rangle = \sum_{j=0}^{+\infty} x_j \overline{y_j}$.

On dit que $x, y$ sont *orthogonaux* si $\langle x, y \rangle = 0$. On a :

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Ré}\langle x, y \rangle.$$

On en déduit les identités de polarisation :

$$\mathrm{Ré}\langle x, y \rangle = \frac{\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2} = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4}.$$

(Quand on ne conserve que la partie réelle d'un produit scalaire complexe, on retrouve un produit scalaire sur l'espace vectoriel réel.)

Un exercice pour vous : donner des formules, inspirées des identités de polarisation ci-dessus, permettant d'exprimer la partie imaginaire de $\langle x, y \rangle$.

**Théorème 2.2 (*Inégalité de Cauchy–Schwarz*)**

*soit $E$ un espace préhilbertien. Alors*

$$\forall x, y, \qquad |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|,$$

*avec égalité ssi $x, y$ sont colinéaires (ou $x = 0$ ou $y = 0$).*

*Démonstration.* Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

$$P(t) = \|x + ty\|^2 = \|x\|^2 + t^2\|y\|^2 + 2t\,\mathrm{Ré}\langle x, y\rangle.$$

C'est un polynôme de degré $2$ qui ne prend que des valeurs positives. Son discriminant est donc négatif, autrement dit :

$$(\mathrm{Ré}\langle x, y\rangle)^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \leq 0, \qquad |\,\mathrm{Ré}\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|.$$

Pour en déduire l'inégalité annoncée, on prend $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, tel que $\langle \lambda x, y\rangle = |\langle x, y\rangle|$ ; on a alors

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|\lambda x\|\,\|y\| = \|x\|\,\|y\|.$$

Traitons le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy–Schwarz ; déjà, il est clair qu'il y a égalité si les deux sont colinéaires ou si l'un des deux est nul. Supposons maintenant $x, y$ non nuls et qu'il y a égalité $|\langle x, y\rangle| = \|x\|\|y\|$. Alors il existe un complexe $\lambda$ de module $1$ tel que $\langle \lambda x, y\rangle = \|x\|\|y\| = \|\lambda x\|\|y\|$.

En posant $x' = \lambda x$ et en considérant le polynôme $P(t) = \|x' + ty\|^2$, les calculs effectués au début de la preuve montrent que $P$ a un discriminant nul, donc une racine réelle double : il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x' + ty = 0$, donc $x$ et $y$ sont colinéaires (sur $\mathbb{C}$). □

**Définition 2.3**

*On dit qu'un espace préhilbertien $H$ est un* espace de Hilbert *si $(H, \|\cdot\|)$ est complet.*

En dimension infinie, Le premier exemple fondamental à avoir en tête est $(\ell^2(\mathbb{N}), \|\cdot\|_2)$.

**Théorème 2.4 (*Identité du parallélogramme*)**

$$\forall x, y \in H, \qquad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Cette identité caractérise les normes issues d'un produit scalaire ; je la laisse en exercice (vous devez savoir faire ce calcul !)

On en vient au théorème le plus important de ce chapitre.

**Théorème 2.5 (*Projection sur un convexe fermé*)**

*Soit $H$ un espace de Hilbert, $C$ une partie non vide, fermée et convexe de $H$. Alors, pour tout $x \in H$, il existe un unique $c \in C$ tel que*

$$d(x, C) = \|x - c\| = \inf_{z \in C} \|x - z\|.$$

*On le note $P_C(x)$ et on l'appelle* projeté *de $x$ sur $C$.*

$$\forall z \in C, \quad \mathrm{Ré}\langle x - P_C(x), z - P_C(x)\rangle \leq 0.$$

*Démonstration.* Soit $r = \inf\{\|x - z\| : z \in C\}$, qui est bien défini et positif en tant que borne inférieure d'un ensemble non vide de réels positifs.

Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, on peut trouver $(c_n) \in C^{\mathbb{N}}$ telle que $\|x - c_n\| \longrightarrow r$. Soient $n, m \in \mathbb{N}$. Comme $C$ est convexe, $(c_n + c_m)/2 \in C$, donc

$$\left\|x - \frac{c_n + c_m}{2}\right\| \geq r.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $N$ tel que $n \geq N \Longrightarrow \|x - c_n\|^2 \leq r^2 + \varepsilon$. L'identité du parallélogramme nous donne, pour tous $n, m \geq N$ :

$$4\left\|x - \frac{c_n + c_m}{2}\right\|^2 + \|c_n - c_m\|^2 = 2\|x - c_n\|^2 + 2\|x - c_m\|^2, \text{ donc}$$

$$\|c_n - c_m\|^2 \leq 2(r^2 + \varepsilon) + 2(r^2 + \varepsilon) - 4r^2 = 4\varepsilon.$$

On vient de montrer que $(c_n)$ est de Cauchy ; elle converge donc dans $H$, puis dans $C$ parce que $C$ est fermée. Par continuité de $d$, $(c_n)$ converge vers $y \in C$ et $d(x, y) = r$.

Si $y' \in C$ est aussi tel que $\|x - y'\| = r$, alors $(y, y', y, y', \ldots)$ est de Cauchy, d'après ce qui précède, donc $y = y'$. On vient de justifier l'unicité du projeté.

Reste à établir la caractérisation du projeté en termes de produit scalaire.

Supposons que pour tout $z \in C$ on ait $\mathrm{Ré}\langle x - y, z - y\rangle \leq 0$. Alors

$$\|x - z\|^2 = \|x - y + y - z\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 + 2\,\mathrm{Ré}\langle x - y, y - z\rangle \geq \|x - y\|^2.$$

Donc $\|x - z\| \geq \|x - y\|$ pour tout $z \in C$, autrement dit $y = P_C(x)$.

Si $y = P_C(x)$, soit $z \in C$ et $t \in [0, 1]$. Alors

$$\|x - ((1 - t)y + tz)\|^2 = \|x - y + t(y - z)\|^2 = \|x - y\|^2 + t^2\|y - z\|^2 + 2t\,\mathrm{Ré}\langle x - y, y - z\rangle.$$

Cette quantité est $\geq \|x - y\|^2$ pour tout $t \in [0, 1]$. On divise par $t \in ]0, 1]$ et on fait tendre $t$ vers $0$ pour conclure. □

Notons qu'on aurait pu, avec la même démonstration, prouver un théorème de projection sur les convexes complets d'un espace préhilbertien (la preuve ci-dessus utilise la complétude de $H$ pour déduire que $C$ est complet, en tant que fermé dans $H$).

**Théorème 2.6**

*$P_C$ est 1-lipschitzienne.*

*Démonstration.* Soient $x, y \in H$. On a

$$\begin{cases} \mathrm{Ré}(\langle x - P_C(x), P_C(y) - P_C(x)) \leq 0, \\ \mathrm{Ré}(\langle y - P_C(y), P_C(x) - P_C(y)\rangle) \leq 0. \end{cases}$$

On en déduit (en écrivant petit pour faire rentrer les équations sur une seule ligne...)

$$\begin{aligned} \|P_C(y) - P_C(x)\|^2 &= \mathrm{Ré}(\|P_C(y) - P_C(x)\|^2) \\ &= \mathrm{Ré}(\langle P_C(y) - y + x - P_C(x) + y - x, P_C(y) - P_C(x)\rangle) \\ &= \mathrm{Ré}(\langle P_C(y) - y, P_C(y) - P_C(x)\rangle) + \mathrm{Ré}(\langle x - P_C(x), P_C(y) - P_C(x)\rangle) + \mathrm{Ré}\langle y - x, P_C(y) - P_C(x)\rangle \\ &\leq \mathrm{Ré}\langle y - x, P_C(y) - P_C(x)\rangle. \end{aligned}$$

Cauchy–Schwarz nous donne $\|P_C(y) - P_C(x)\|^2 \leq \|P_C(y) - P_C(x)\|\|y - x\|$, et on conclut. □

**Théorème 2.7 (*Projection sur un sous-espace vectoriel fermé*)**

*Soit $H$ un espace de Hilbert, $E$ un sous-espace vectoriel fermé. Pour tout $x \in H$, $P_E(x)$ est l'unique élément de $E$ tel que*

$$\forall e \in E, \qquad \langle x - P_E(x), e\rangle = 0.$$

*Démonstration.* Si $y \in E$ satisfait cette condition, alors $\mathrm{Ré}\langle x-y, y-z\rangle = 0 \leq 0$ pour tout $z \in E$, donc $y = P_E(x)$.

Si $y = P_E(x)$, alors pour tout $e \in E$, $\mathrm{Ré}\langle x-y, y-e\rangle \leq 0$. Comme $E$ est un espace vectoriel, $e \mapsto y-e$ et une bijection de $E$, et on en déduit $\mathrm{Ré}\langle x-y, e\rangle = 0$ pour tout $e \in E$. En considérant $\imath e$, $\mathrm{Ré}\langle x-y, \imath e\rangle = 0$ pour tout $e \in E$. Donc $\langle x-y, e\rangle = 0$ pour tout $e \in E$. □

Notons que $P_E$ est linéaire, continue, de norme $1$ si $E \neq \{0\}$ (exercice).

**Définition 2.8**

*On note $E^\perp = \{y \in H : \forall e \in E,\ \langle y, e\rangle = 0\}$. On l'appelle l'*orthogonal *de $E$.*

**Remarque.** Comme $x \longmapsto \langle x, y\rangle$ est $\mathbb{R}$-linéaire et continue par Cauchy–Schwarz, $E^\perp$ est toujours fermé (en tant qu'intersection de noyaux de formes linéaires continues).

**Théorème 2.9**

*Soit $H$ un espace de Hilbert et $E$ un sous-espace fermé de $H$. On a $H = E \oplus E^\perp$.*
*On appelle $E^\perp$ le supplément orthogonal de $E$, qui est l'unique sous-espace vectoriel orthogonal à $E$ et tel que $E \oplus F = H$.*

*Démonstration.* Déjà, si $x \in E \cap E^\perp$, alors $\langle x, x\rangle = 0$, donc $x = 0$. Ensuite, pour tout $x \in H$, on a

$$x = \underbrace{x - P_E(x)}_{\in E^\perp} + \underbrace{P_E(x)}_{\in E}.$$ □

**Théorème 2.10**

*Soit $H$ un espace de Hilbert et $E$ un sous-espace vectoriel de $H$. Alors $\overline{E} = (E^\perp)^\perp$.*

*Démonstration.* $(E^\perp)^\perp$ est fermé et contient $E$. Donc $\overline{E} \subseteq (E^\perp)^\perp$. De plus, de $E \subseteq \overline{E}$ et par continuité du produit scalaire on obtient $E^\perp = (\overline{E})^\perp$.

On sait que $E^\perp \oplus (E^\perp)^\perp = H$ ; on a aussi, puisque $\overline{E}$ est un sous-espace vectoriel fermé, $\overline{E} \oplus \overline{E}^\perp = H$. D'après le paragraphe précédent, cela revient à $\overline{E} \oplus E^\perp = H$.

Donc $\overline{E}$ et $(E^\perp)^\perp$ sont deux supplémentaires orthogonaux d'un même sous-espace vectoriel fermé : par conséquent, ils sont égaux. □

En particulier, pour un sous-espace vectoriel $E$ de $H$, on a l'équivalence

$$(E \text{ est dense dans } H) \iff (E^\perp = \{0\}).$$

En effet, si $E$ est dense dans $H$ alors $E^\perp = \overline{E}^\perp = H^\perp = \{0\}$. Réciproquement, si $E^\perp = \{0\}$ alors $\overline{E} = (E^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = H$.

**Théorème 2.11 (*Riesz*)**

*Soit $H$ un espace de Hilbert et $\varphi : H \to \mathbb{K}$ une forme linéaire continue. Alors il existe un unique $u \in H$ tel que*

$$\forall x \in H, \qquad \varphi(x) = \langle x, u \rangle.$$

*De plus, $\|\varphi\| = \|u\|$.*

*Démonstration.* Si $\varphi = 0$, alors $u = 0$ convient, et est l'unique élément de $H$ tel que $H^\perp = \{0\}$.

Si $\varphi \neq 0$, soit $E = \ker \varphi$ ; il est de codimension $1$ (noyau d'une forme linéaire). Donc il existe $v \in H$ tel que $E^\perp = \mathbb{K}v$. Pour tout $x \in \ker \varphi$, on a $\varphi(x) = 0 = \langle x, v \rangle$.

Soit $u = \lambda v$, avec $\lambda = \overline{\varphi(v)}/\|v\|^2$ ; on a

$$\varphi(u) = \lambda \varphi(v) = \frac{|\varphi(v)|^2}{\|v\|^2}, \qquad \langle u, u \rangle = |\lambda|^2 \|v\|^2 = \frac{|\varphi(v)|^2}{\|v\|^2}.$$

Ainsi, $\varphi$ et $\langle \cdot, u \rangle$ sont deux formes linéaires qui sont égales sur $\ker(\varphi)$ (elles y sont toutes les deux nulles) et sur $\mathbb{K}u$ (puisqu'elles sont linéaires et égales en $u$). Comme ces deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires, on a $\varphi(x) = \langle x, u \rangle$ pour tout $x \in H$.

Ceci donne l'existence de $u$ ; on laisse en exercice (normalement, pas difficile) le fait de prouver l'unicité de $u$ et le fait que $\langle \varphi \rangle = \|u\|$. □

**Définition 2.12**

*Soit $H$ un espace de Hilbert séparable, et $I \subseteq \mathbb{N}$. On dit que $(e_n)_{n \in I}$ est une* base hilbertienne *si :*

- *$\forall n$, $\|e_n\| = 1$, et $\forall n \neq m$, $\langle e_n, e_m \rangle = 0$ ;*
- *$\mathrm{Vect}(e_n : n \in I)$ est dense dans $H$.*

**Exemples.** Sur $\mathbb{K}^n$ on retrouve la notion usuelle de base orthonormale. Sur $\ell^2(\mathbb{N})$, on obtient une base hilbertienne en considérant la famille $(e_n)_n$ définie par

$$e_n(i) = \delta_{n,i} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Attention : cette famille n'est *pas* une base au sens de l'algèbre linéaire : l'espace vectoriel engendré par les $e_n$ est l'ensemble des suites à support fini.

On ne discute ici les bases hilbertiennes que dans le contexte des espaces de Hilbert séparables, mais on peut donner un sens à cette notion (famille orthonormée qui engendre un sous-espace dense) dans tout espace de Hilbert.

**Théorème 2.13**

*Une famille orthonormale est une base hilbertienne ssi*

$$\forall x \in H, \qquad (\forall n,\ \langle x, e_n \rangle = 0) \Longrightarrow x = 0.$$

La preuve est (normalement) facile étant donné tout ce qui a été fait plus haut, et je la laisse en exercice permettant de vérifier (ou pas...) que vous avez suivi le cours jusqu'ici.

**Théorème 2.14**

*Soit $H$ un espace de Hilbert séparable. Alors $H$ admet une base hilbertienne (au plus) dénombrable.*

*Démonstration.* Si $H$ est de dimension finie, on prend une base algébrique et on lui applique Gram–Schmidt (ou on applique l'argument ci-dessous jusqu'à ce qu'il s'arrête en temps fini).

Sinon, soit $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ dense dans $H$, avec $x_0 \neq 0$. On pose $e_0 = x_0/\|x_0\|$ ; une fois $e_0, \dots, e_n$ construits, on prend

$$j = \min\{i \geq n+1 : x_i \notin \operatorname{Vect}(e_0, \dots, e_n)\},$$

Un tel $j$ existe précisément parce que $H$ n'est pas engendré par une famille finie : s'il n'en existe pas, alors $\operatorname{Vect}(e_0, \dots, e_n)$, qui est fermé puisque de dimension finie, contient un sous-ensemble dense et est donc égal à $H$.

On pose ensuite

$$e_{n+1} = \frac{x_j - P_{\operatorname{Vect}(e_0,\dots,e_n)}(x_j)}{\|x_j - P_{\operatorname{Vect}(e_0,\dots,e_n)}(x_j)\|}.$$

Alors $(e_n)$ est orthonormée et le construction assure que, pour tout $n$, on a $x_n \in \operatorname{Vect}(e_0, \dots, e_n)$ (je vous laisse le vérifier par récurrence). Donc $\operatorname{Vect}(e_0, e_1, \dots)$ est dense. □

Fixons maintenant une base hilbertienne $(e_n)$ d'un espace de Hilbert séparable $H$, de dimension infinie. Notons $E_n = \operatorname{Vect}(e_0, \dots, e_n)$, qui est fermé comme tout espace vectoriel de dimension finie.

$$\forall x \in H, \qquad P_{E_n}(x) = \sum_{j=0}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j.$$

Puisque $\|P_{E_n}(x)\|^2 = \sum_{j=0}^{n} |\langle x, e_j\rangle|^2 \leq \|x\|^2$ pour tout $n$, on obtient :

**Théorème 2.15 (*Inégalité de Bessel*)**

$$\sum_{j=0}^{+\infty} |\langle x, e_j\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Puisque $E_n \subseteq E_{n+1}$ pour tout $n$, la suite $\|x - P_{E_n}(x)\|$ est décroissante.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\bigcup E_n = \operatorname{Vect}(e_n : n \in \mathbb{N})$ est dense dans $H$, il existe $u \in \bigcup E_n$ tel que $\|x - u\| \leq \varepsilon$. Par définition d'une réunion, il existe $N$ tel que $u \in E_N$, et on a $d(x, E_N) = \|x - P_{E_N}(x)\| \leq \|x - u\| \leq \varepsilon$. Mais alors $\|x - P_{E_n}(x)\| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$, par monotonie.

On vient d'établir que $\|x - P_{E_n}(x)\| \longrightarrow 0$. Autrement dit :

**Théorème 2.16 (*Égalités de Parseval*)**

$$x = \sum_{j=0}^{+\infty} \langle x, e_j\rangle e_j, \qquad \|x\|^2 = \sum_{j=0}^{+\infty} |\langle x, e_j\rangle|^2.$$

*Démonstration.* On a déjà justifié la première égalité puisque $P_N(x) = \sum_{j=0}^{N} \langle x, e_j\rangle e_j$ et qu'on a montré que $(P_N(x))$ converge vers $x$.

Pour la deuxième égalité, on utilise que, pour tout $N$,

$$\|x\|^2 = \|P_{E_N}(x)\|^2 + \|x - P_{E_N}(x)\|^2 = \sum_{j=0}^{N} |\langle x, e_j\rangle|^2 + \underbrace{\|x - P_{E_N}(x)\|^2}_{\longrightarrow 0}.$$ □

**Théorème 2.17**

*Soit $H$ un espace de Hilbert séparable de dimension infinie. Alors $H$ est linéairement isométrique à $\ell^2(\mathbb{N})$.*

*Démonstration.* Soit $(e_n)$ une base hilbertienne de $H$. Tout $x \in H$ s'écrit de manière unique

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n\rangle e_n, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 < +\infty.$$

On définit $T : H \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N})$ par $T(x) = (\langle x, e_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$. Cette application est bien définie, linéaire, à valeurs dans $\ell^2(\mathbb{N})$ par l'égalité de Parseval. On a même :

- $\forall x$, $\|T(x)\|_2^2 = \sum |\langle x, e_n\rangle|^2 = \|x\|_H^2$ ;
- si $(f_n)$ est la base hilbertienne usuelle de $\ell^2(\mathbb{N})$, chaque $f_n$ est dans $\mathrm{Im}(T)$. puisque $f_n = T(e_n)$.

Donc $\mathrm{Im}(T)$ est dense et fermée, puisque $H$ est complet et $T$ est une isométrie. Donc $T$ est une isométrie surjective.

Une autre démonstration possible, plus proche de ce qui a été fait au tableau : définir explicitement l'inverse de $T$, en convenant que, pour $u \in \ell^2(\mathbb{N})$ on pose

$$S(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u(n) e_n.$$

Je vous laisse vérifier que $S$ est une isométrie et que $T, S$ sont inverses l'une de l'autre. □

## 2.1 Adjoint d'un opérateur sur un espace de Hilbert

**Théorème 2.18**

*Soit $T\colon H \to H$ une application linéaire continue sur un espace de Hilbert $H$. Alors il existe une unique application linéaire continue $T^*\colon H \to H$ telle que*

$$\forall x, y \in H, \qquad \langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle.$$

*On appelle $T^*$ l'*adjoint *de $T$, et l'on a $\|T^*\| = \|T\|$.*

On dit que $T$ est *autoadjoint* si $T = T^*$.

*Démonstration.* Supposons d'abord que $S_1, S_2$ vérifient la propriété demandée. Alors, pour tous $x, y \in H$,

$$\langle x, (S_1 - S_2)(y)\rangle = 0.$$

Ainsi $\mathrm{Im}(S_1 - S_2) \subseteq H^\perp = \{0\}$, donc $S_1 = S_2$.

Pour montrer l'existence, fixons $y \in H$ et considérons la forme linéaire

$$\varphi_y\colon x \mapsto \langle T(x), y\rangle.$$

Cette forme linéaire est continue par Cauchy–Schwarz et par continuité de $T$. D'après le théorème de Riesz, il existe un unique élément, noté $T^*(y)$, tel que

$$\forall x \in H, \qquad \langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle.$$

Comme

$$\langle T(x), \lambda y_1 + y_2\rangle = \overline{\lambda}\,\langle T(x), y_1\rangle + \langle T(x), y_2\rangle = \langle x, \lambda T^*(y_1) + T^*(y_2)\rangle,$$

on conclut (par l'unicité dans le théorème de Riesz) que $\lambda T^*(y_1) + T^*(y_2) = T^*(\lambda y_1 + y_2)$, autrement dit $T^*$ est linéaire.

Pour la continuité, notons que, pour tout $y \in H$,

$$\begin{aligned}\|T^*(y)\|^2 &= \langle T^*(y), T^*(y)\rangle \\ &= \langle T(T^*(y)), y\rangle \\ &\leq \|T\|\ \|T^*(y)\|\ \|y\|\,.\end{aligned}$$

On en déduit $\|T^*(y)\| \leq \|T\|\ \|y\|$ ; ainsi $T^*$ est continue et $\|T^*\| \leq \|T\|$. Il est clair que $(T^*)^* = T$, on obtient donc $\|T^*\| = \|T\|$. □

**Théorème 2.19**

*Soit $T\colon H \to H$ linéaire continue. Alors*

*(i)* $\ker(T) = \big(\mathrm{Im}(T^*)\big)^\perp$ ;

*(ii)* $\overline{\mathrm{Im}(T)} = \big(\ker(T^*)\big)^\perp$.

Attention : il peut tout à fait arriver que $\mathrm{Im}(T)$ ne soit pas fermé.

*Démonstration.* (i) Si $x \in \ker(T)$, alors, pour tout $y \in H$,

$$\langle x, T^*(y)\rangle = \langle T(x), y\rangle = 0.$$

Réciproquement, si $x \in (\mathrm{Im}(T^*))^\perp$, alors, pour tout $y \in H$, $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle = 0$. Donc $T(x) \in H^\perp = \{0\}$, autrement dit $x \in \ker(T)$.

(ii) En appliquant (i) à $T^*$, on obtient

$$\ker(T^*) = \big(\mathrm{Im}((T^*)^*)\big)^\perp = \big(\mathrm{Im}(T)\big)^\perp.$$

Par passage à l'orthogonal,

$$\big(\ker(T^*)\big)^\perp = \big(\mathrm{Im}(T)^\perp\big)^\perp = \overline{\mathrm{Im}(T)}.$$

□

# Chapitre 3

# Espaces $L^p$ et produit de convolution

## 3.1 Espaces $L^p$

Soit $(X, \mu)$ un espace mesuré (au tableau on n'a considéré que le cas où $X = \mathbb{R}^d$ muni de la mesure de Lebesgue, cas auquel on reviendra à partir de la section suivante. Comme cela ne change rien ici j'énonce la définition dans le cadre général, mais vous pouvez tout à fait vous restreindre au cas de $\mathbb{R}^d$).

Pour $1 \leq p < +\infty$, on note $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ l'ensemble formé par toutes les fonctions mesurables de $X$ dans $\mathbb{K}$ telles que $\displaystyle\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu < +\infty$. On pose alors $\|f\|_p = \left(\displaystyle\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}$. L'*inégalité de Minkowski*, qu'on admet ici, assure que pour tout $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$ on a $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Il est bien clair que $\|\cdot\|_p$ est homogène ; mais en général elle ne satisfait pas la propriété de séparation, puisqu'il est possible pour une fonction positive d'être d'intégrale nulle sans être vraiment nulle partout : la nullité de $\displaystyle\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu$ entraîne seulement que $f$ est nulle *presque partout*. On décide donc d'identifier deux éléments de $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ quand ils coïncident presque partout ou, plus formellement, de quotienter $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ par le sous-espace vectoriel formé par les fonctions nulles presque partout. L'espace vectoriel ainsi obtenu est noté $L^p(X, \mu)$, et $\|\cdot\|_p$ y définit une norme.

Dans le cas $p = +\infty$, on définit $\mathcal{L}^\infty(X, \mu)$ comme l'ensemble des fonctions mesurables telles qu'il existe $M$ pour lequel $\{x \colon |f(x)| > M\}$ soit négligeable ; on note $\|f\|_\infty$ la borne inférieure de tous ces $M$, et on vérifie que $[f(x)| \leq \|f\|_\infty$ presque partout. À nouveau, on identifie les fonctions qui coïncident presque partout pour former l'espace $L^\infty(X, \mu)$, sur lequel $\|\cdot\|_\infty$ est une norme.

On n'insistera pas sur ces identifications ci-dessous, même s'il faut les garder dans un coin de la tête.

L'*inégalité de Hölder* assure que, si $1 \leq p, q \leq \infty$ sont des *exposants conjugués*, c'est-à-dire tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ (avec la convention $\dfrac{1}{+\infty} = 0$) alors on a pour tout $f \in L^p(X, \mu)$ et tout $g \in L^q(X, \mu)$ que $fg \in L^1(X, \mu)$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Cette inégalité est particulièrement importante dans le cas $p = q = 2$ : elle nous assure qu'on peut munir $L^2(X, \mu)$ d'un produit scalaire en posant

$$\langle f, g \rangle = \int_X f \bar{g} \,\mathrm{d}\mu.$$

Se pose alors naturellement la question de la complétude : $L^2(X, \mu)$ est-il un espace de Hilbert ? La réponse est positive, comme le prouve le théorème de Riesz–Fischer qu'on énonce maintenant.

**Théorème 3.1 (*Théorème de Riesz–Fischer*)**

*Pour tout $p \in [1, +\infty]$, l'espace $L^p(X, \mu)$ est un espace de Banach. De plus, si $(f_n)_n$ converge vers $f$ dans $L^p(X, \mu)$ alors on peut extraire une sous-suite $(f_{\varphi(n)})$ qui converge vers $f$ presque partout.*

On laisse le cas $p = +\infty$ en exercice ; ce cas est plus simple et nécessite surtout de connaître un peu de théorie de la mesure. Notons que la convergence pour $\|\cdot\|_\infty$ implique la convergence presque partout : dans ce cas, pas besoin d'extraire. En général, la convergence pour $\|\cdot\|_p$ n'implique pas la convergence presque partout (quand $X = [0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue, on a discuté au tableau l'exemple de la suite de la machine à écrire).

*Preuve pour $1 \leq p < +\infty$.* Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $L^p(X, \mu)$. Il nous suffit de prouver que $(f_n)_n$ a une valeur d'adhérence pour prouver qu'elle converge dans $L^p$ (toute suite de Cauchy avec une valeur d'adhérence est convergente). Quitte à extraire, on peut supposer que $\|f_{n+1} - f_n\|_p \leq 2^{-n-1}$, ce qu'on fait dans la suite. En posant $g_n = f_{n+1} - f_n$, il nous suffit maintenant de prouver que, sous cette hypothèse, $\sum g_n$ (série télescopique) converge à la fois dans $L^p(X, \mu)$ et presque partout.

Notons $h(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |g_n(x)|$ (la valeur $+\infty$ est autorisée) et $h_N(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} |g_n(x)|$. Pour tout $N$ on a, par l'inégalité de Minkowski :

$$\|h_N\|_p \leq \sum_{n=0}^{N} \||g_n|\|_p \leq \sum_{n=0}^{N} 2^{-n-1} \leq 1.$$

Pour tout $x$, on a $|h(x)|^p = \lim\limits_N |h_N(x)|^p$. Le lemme de Fatou nous permet alors d'affirmer que

$$\int_X |h|^p \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_N \int_X |h_N|^p \,\mathrm{d}\mu \leq 1$$

On conclut en particulier que $|h|^p$ est intégrable, donc finie presque partout. Ceci nous permet d'affirmer que, en dehors d'un ensemble de mesure nulle, $\sum g_n(x)$ est absolument convergente et donc convergente. Notons $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$. Puisque pour tout $x$ on a $|g(x)| \leq h(x)$ on voit que $g \in L^p(X, \mu)$.

Il nous reste à justifier que $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{N} g_n\right)_N$ converge vers $g$ dans $L^p(X, \mu)$. En appliquant le lemme de Fatou de la même façon que ci-dessus, on obtient que, pour tout $N$,

$$\int_X \left|\sum_{n=0}^{N} g_n - g\right|^p \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{M \to +\infty} \left(\sum_{n=N+1}^{M} 2^{-n-1}\right)^p \leq 2^{(1-N)p} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0.$$

Ceci prouve que $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{N} g_n\right)_N$ converge vers $g$ pour $\|\cdot\|_p$. □

On peut montrer en utilisant un peu de théorie de la mesure que, si $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, alors les combinaisons linéaires de fonctions caractéristiques de pavés sont denses dans $L^p(\Omega)$ pour tout $p$ fini. Une fois cela admis (ce qu'on fait ici), il n'est pas difficile de prouver que les fonctions continues à support compact sont denses dans $L^p(\Omega)$ (et c'est un exercice recommandé). Il est important de garder ce résultat en tête, il sera important dans la suite.

Les combinairons linéaires à coefficients dans $\mathbb{Q}$ (ou dans $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ dans le cas complexe) de fonctions caractéristiques à coefficients rationnels de rectangles à extrémités rationnelles (i.e., les parties de la forme

$[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_d, b_d]$ où chaque $a_i$ et chaque $b_i$ sont rationnels) forment un sous-espace dense de $L^p(\Omega)$ pour tout $p$ fini : en particulier, $L^p(\Omega)$ est séparable pour tout $p < +\infty$.

Il suit en particulier de cela que $L^2(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Hilbert séparable, donc il existe une isométrie linéaire surjective de $\ell^2(\mathbb{N})$ sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ !

## 3.2 Produit de convolution

**Définition 3.2**

*Soient $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$. On pose*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t) g(x-t) \, \mathrm{d}t,$$

lorsque cette intégrale est bien définie, *c'est-à-dire lorsque*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(t) g(x-t)| \, \mathrm{d}t < +\infty.$$

*On appelle cela le* produit de convolution *de $f$ et $g$.*

**Remarque 3.3.**

- Lorsque $(f * g)(x)$ est bien défini, le changement de variable $u = x - t$ montre que $(g * f)(x)$ l'est aussi et que
$$(f * g)(x) = (g * f)(x).$$
- Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, avec $1 \leq p, q \leq +\infty$ et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, l'inégalité de Hölder assure que $f * g$ est défini p.p., appartient à $L^\infty(\mathbb{R}^d)$, et
$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \, \|g\|_q .$$

———Fin de la séance du lundi 2 novembre ——

## 3.3 Convolution avec des exposants conjugués

Fixons $p \in [1, +\infty[$ et son *exposant conjugué* $q$, défini par $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

**Lemme 3.4**

*Soit $p < +\infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on note $f_x(t) = f(t - x)$. Alors l'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \longrightarrow & L^p(\mathbb{R}^d) \\ x & \longmapsto & f_x \end{array}$$

*est uniformément continue.*

*Démonstration.* Supposons tout d'abord $f$ continue à support compact (qu'on note $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$). Notons qu'alors $f$ est uniformément continue et bornée. Soit $R > 0$ tel que $f(u) = 0$ dès que $\|u\| > R$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^d \quad \|u - v\| \leq \delta \Rightarrow |f(u) - f(v)| \leq \varepsilon.$$

Pour $x, h \in \mathbb{R}^d$ avec $\|h\| \leq \min(\delta, 1)$, on a

$$\begin{aligned}\|f_{x+h} - f_x\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(t-x-h) - f(t-x)|^p \, \mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(s-h) - f(s)|^p \, \mathrm{d}s \\ &= \int_{B(0,R+1)} |f(s-h) - f(s)|^p \, \mathrm{d}s \\ &\leq \mu\big(B(0, R+1)\big)\, \varepsilon^p.\end{aligned}$$

On vient de montrer qu'il existe une constante $C$ telle que dès que $\|h\| \leq \delta$ on a $\|f_{x+h} - f_x\|_p \leq C\varepsilon$.

Pour le cas général, on utilise la densité de $C_c(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ (vraie pour $p < +\infty$). Soit $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$ telle que $\|g - f\|_p \leq \varepsilon$. Par ce qui précède, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|x - y\| \leq \delta \Rightarrow \|g_x - g_y\|_p \leq \varepsilon.$$

Alors, par invariance de la norme $L^p$ par translation,

$$\begin{aligned}\|f_x - f_y\|_p &\leq \|f_x - g_x\|_p + \|g_x - g_y\|_p + \|g_y - f_y\|_p \\ &\leq 3\varepsilon.\end{aligned}$$

□

**Théorème 3.5**

*Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, où $p, q$ sont conjugués. Alors :*

*(i) $f * g$ est définie partout, uniformément continue et bornée.*

*(ii) Si $p$ et $q$ sont finis, alors*

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} (f * g)(x) = 0.$$

*Démonstration.* (i) Le fait que $f * g$ est définie partout et bornée est une conséquence immédiate de l'inégalité de Hölder. Quitte à permuter $p$ et $q$, on peut supposer que $q$ est fini.

Pour $x, y \in \mathbb{R}^d$, on a

$$(f * g)(x) - (f * g)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\big(g(x-t) - g(y-t)\big)\, \mathrm{d}t.$$

Par Hölder,

$$|(f * g)(x) - (f * g)(y)| \leq \|f\|_p \, \|g_x - g_y\|_q .$$

Le lemme précédent permet de conclure.

(ii) Si $f, g$ sont continues à support compact, alors comme

$$\operatorname{supp}(f * g) \subseteq \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g),$$

on a que $f * g$ est nulle à l'infini.

Dans le cas général, fixons $\varepsilon > 0$. Choisissons $\widetilde{f} \in C_c(\mathbb{R}^d)$ et $\widetilde{g} \in C_c(\mathbb{R}^d)$ telles que $\left\|f - \widetilde{f}\right\|_p \leq \varepsilon$ et $\|g - \widetilde{g}\|_q \leq \varepsilon$. Alors

$$\begin{aligned}\left\|f * g - \widetilde{f} * \widetilde{g}\right\|_\infty &\leq \|f * (g - \widetilde{g})\|_\infty + \left\|(f - \widetilde{f}) * \widetilde{g}\right\|_\infty \\ &\leq \|f\|_p \, \varepsilon + \varepsilon \, \|\widetilde{g}\|_q \quad \text{(par le point (i))} \\ &\leq \varepsilon(\|f\|_p + \|g\|_q + \varepsilon).\end{aligned}$$

Comme $\widetilde{f} * \widetilde{g}$ est nulle à l'infini, on a gagné.

□

**Remarque 3.6.** Convoler par l'indicatrice d'une boule revient à intégrer la fonction sur une boule :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(t)\, \mathbf{1}_{B(0,r)}(x-t)\, \mathrm{d}t = \int_{B(x,r)} f(t)\, \mathrm{d}t.$$

On peut penser au produit de convolution par une fonction $L^1$ comme une forme de "moyenne glissante" ; cette opération de moyenne a tendance à lisser les singularités, comme on va le voir plus bas.

## 3.4 Convolution par une fonction $L^1$

On a déjà vu que convoler $L^1$ et $L^\infty$ donne une fonction uniformément continue et bornée (ce sont des exposants conjugués).

**Théorème 3.7**

*Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et*

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \, \|g\|_1 .$$

*Démonstration.* Pour voir que $f * g$ est défini presque partout et appartient à $L^1$, il suffit de montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(t) g(x-t)| \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x < +\infty.$$

Par Fubini–Tonelli et par invariance de l'intégrale de Lebesgue par translation,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(t) g(x-t)| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = \|f\|_1 \, \|g\|_1 < +\infty.$$

Donc $f * g$ est bien défini p.p., dans $L^1$, et l'inégalité triangulaire donne $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \, \|g\|_1$. □

C'est un bon exercice de montrer que si $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors $f * (g * h) = (f * g) * h$ (au sens $L^1$). Le premier exercice de la feuille 4 de l'an dernier que je vous ai envoyée par mail contient cet énoncé sans hypothèses, qui est particulièrement faux : considérer $f = g = 1$ et $h = 0$. Bien sûr c'était pour vérifier si vous faites vraiment les exercices.

**Théorème 3.8 (*Inégalité de Young, cas $L^1 * L^p$*)**

*Soient $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, où $1 \leq p \leq +\infty$. Alors $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et*

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \, \|g\|_p .$$

*Démonstration.* Les cas $p = 1$ et $p = +\infty$ ont déjà été traités. Supposons donc $1 < p < +\infty$ et notons $q$ l'exposant conjugué de $p$.

On veut d'abord montrer que $f * g$ est bien défini presque partout. Écrivons

$$|f(t)| = |f(t)|^{1/p} \, |f(t)|^{1/q} .$$

Par Hölder, pour $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |f(t)g(x-t)| \, \mathrm{d}t &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(t)| \, |g(x-t)|^p \, \mathrm{d}t\right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(t)| \, \mathrm{d}t\right)^{1/q} \\ &= \|f\|_1^{1/q} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(t)| \, |g(x-t)|^p \, \mathrm{d}t\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

Or, par Tonelli,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(t)| \, |g(x-t)|^p \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x = \|f\|_1 \, \|g\|_p^p < +\infty.$$

On conclut que $f * g$ est bien défini presque partout. En intégrant l'inégalité précédente, on obtient

$$\begin{aligned}\|f * g\|_p^p &\leq \|f\|_1^{p/q} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(t)| \, |g(x-t)|^p \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x \\ &= \|f\|_1^{p/q+1} \, \|g\|_p^p = \|f\|_1^p \, \|g\|_p^p.\end{aligned}$$

□

## 3.5 Régularisation par convolution

**Définition 3.9**

*Soit $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^1(\mathbb{R}^d)$. On dit que c'est une* unité approchée pour la convolution *si*

*(i)* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|k_n\|_1 < +\infty$ ;

*(ii)* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{\mathbb{R}^d} k_n(t) \, \mathrm{d}t = 1$ ;

*(iii)* $\forall \delta > 0, \quad \int_{\|t\| \geq \delta} |k_n(t)| \, \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

**Exemple 3.10.** Si $\varphi$ est une fonction continue à support compact et $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi = 1$, on obtient une unité approchée pour la convolution en posant $k_n(x) = n^d \varphi(nx)$.

Il suit de cela qu'il existe une unité approchée pour la convolution qui est constituée de fonctions $C^\infty$ à support compact (voir TD).

**Remarque 3.11.** Si les $k_n$ sont à valeurs positives (ce qui est souvent le cas en pratique), l'hypothèse (i) est automatiquement vérifiée car $\|k_n\|_1 = \int k_n = 1$.

**Théorème 3.12**

*Soient $p \in [1, +\infty[$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $(k_n)$ une unité approchée pour la convolution. Alors*

$$\|f * k_n - f\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

*Démonstration.* Par définition, on a, pour presque tout $x$,

$$\begin{aligned}|(f * k_n)(x) - f(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^d} k_n(t)(f(x-t) - f(x)) \, \mathrm{d}t\right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |k_n(t)| \, |f(x-t) - f(x)| \, \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Par Hölder, en écrivant de nouveau $|k_n(t)| = |k_n(t)|^{1/p}|k_n(t)|^{1/q}$, on a

$$|(f*k_n)(x) - f(x)|^p \leq \|k_n\|_1^{p-1} \int_{\mathbb{R}^d} |k_n(t)|\,|f(x-t)-f(x)|^p \,\mathrm{d}t.$$

En intégrant :

$$\|f*k_n - f\|_p^p \leq \|k_n\|_1^{p-1} \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |k_n(t)|\,|f(x-t)-f(x)|^p \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$$

En appliquant Tonelli :

$$\|f*k_n - f\|_p^p \leq C^{p-1} \int_{\mathbb{R}^d} |k_n(t)|\ \|f_t - f\|_p^p \,\mathrm{d}t, \quad C = \sup_n \|k_n\|_1 .$$

On a réutilisé la notation $f_t(x) = f(x-t)$ utilisée au début du chapitre. On sait que $t \mapsto f_t$ est uniformément continue (de $\mathbb{R}^d$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$) ; pour conclure que $\|f*k_n - f\|_p \longrightarrow 0$, il nous suffit donc de prouver le lemme suivant :

**Lemme 3.13**

*Soit $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continue et bornée, telle que $\varphi(0) = 0$. Alors, pour une unité approchée $(k_n)$,*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |k_n(t)|\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

*Démonstration.* Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que $\|t\| \leq \delta$ entraîne $|\varphi(t)| \leq \varepsilon$. En séparant l'intégrale,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^d} |k_n(t)|\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| &\leq \int_{\|t\|\leq\delta} |k_n(t)|\,|\varphi(t)|\ \mathrm{d}t + \int_{\|t\|>\delta} |k_n(t)|\,|\varphi(t)|\ \mathrm{d}t \\ &\leq C\varepsilon + \|\varphi\|_\infty \int_{\|t\|>\delta} |k_n(t)|\ \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

□

On a fini de prouver que $f*k_n$ converge vers $f$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. □

En TD, vous utiliserez ce résultat pour établir que $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour tout $p$ fini.