Partiel du 7 mars 2017, durée 2h - Corrigé

Problème 1.

1. Soit κ un cardinal tel que pour tout cardinal $\mu < \kappa$ on ait $2^\mu \leq \kappa$. Montrer qu'alors pour tous cardinaux $\lambda, \mu < \kappa$ on a $\lambda^\mu \leq \kappa$.

   Corrigé. *On commence par remarquer que si κ est fini alors on doit avoir $\kappa = 0$ ou $\kappa = 1$ et le résultat désiré est vrai. Le cas intéressant est donc celui où κ est infini. Si λ et μ sont finis, il n'y a rien à faire ; de même si l'un des deux est nul. Si λ ou μ est infini (et les deux sont non nuls) alors $\lambda \cdot \mu = \max(\lambda, \mu)$. De plus, on a $\lambda < 2^\lambda$ d'où $\lambda^\mu \leq 2^{\lambda \cdot \mu} \leq \kappa$ car $\lambda \cdot \mu = \max(\lambda, \mu) < \kappa$.*

2. On suppose de plus que κ est régulier. Montrer qu'alors

$$\sum_{\mu<\kappa, \mu \text{ cardinal}} \kappa^\mu = \kappa \ .$$

   (On pourra essayer d'exploiter judicieusement, après l'avoir justifié, le fait que l'image d'une fonction de μ dans κ est bornée dès que $\mu < \kappa$).

   Corrigé. *Soit un cardinal $\mu < \kappa$. Comme κ est régulier, toute fonction de μ dans κ est strictement majorée. Ainsi, on a*

$$\kappa^\mu \subset \bigcup_{\lambda<\kappa} |\lambda|^\mu.$$

   D'après la question précédente, on obtient $\kappa^\mu \leq \kappa \cdot \kappa = \kappa$ d'où $\sum_{\mu<\kappa, \mu \text{ cardinal}} \kappa^\mu \leq \kappa \cdot \kappa = \kappa$, ce qui donne l'égalité voulue car l'inégalité inverse est évidente.

Problème 2. Étant donné un ensemble d'ordinaux X et $\alpha > 0$ un ordinal limite, on dit que α est un *point limite* de X si $\sup(X \cap \alpha) = \alpha$. Dans cet exercice, κ est un cardinal régulier non dénombrable. Une partie $C \subset \kappa$ est un *club* si C n'est pas strictement majoré dans κ et pour tout $\alpha < \kappa$ qui est un point limite de C on a $\alpha \in C$.

1. Commençons par un exemple : montrer que l'ensemble des ordinaux limites $\alpha < \kappa$ est un club.

   Corrigé. *Tout point limite de cet ensemble est évidemment dans cet ensemble car celui-ci contient tous les ordinaux limites dans κ. Vérifions que cet ensemble n'est pas majoré : en effet si $\beta < \kappa$ alors $\beta + \omega$ est un ordinal limite appartenant à κ car $|\beta + \omega| = \max(|\beta|, \aleph_0)$ et κ n'est pas dénombrable. Cet ensemble est donc un club.*

2. Montrer que si C, D sont des clubs alors $C \cap D$ est un club.

   (Pour montrer que $C \cap D$ est non borné, on pourra essayer de procéder comme suit : étant donné $\alpha < \kappa$, construire une suite d'ordinaux strictement croissante $(\beta_i)_{i<\omega}$ telle que $\alpha < \beta_0$, $\beta_{2n} \in C$ et $\beta_{2n+1} \in D$ pour tout n.)

   Corrigé. *Soit $\alpha < \kappa$ un point limite de $C \cap D$. Alors $\alpha = \sup(C \cap D \cap \alpha) = \sup(C \cap \alpha) = \sup(D \cap \alpha)$, d'où $\alpha \in C \cap D$ car C et D sont des clubs.*

   Montrons que $C \cap D$ n'est pas borné : soit $\alpha < \kappa$. Comme C et D ne sont pas bornés, on peut construire par récurrence une suite d'ordinaux strictement croissante $(\beta_i)_{i<\omega}$ telle que $\alpha < \beta_0$, $\beta_{2n} \in C$ et $\beta_{2n+1} \in D$ pour tout n. On pose alors $\beta = \sup\{\beta_i \colon i < \omega\}$. Comme $cof(\kappa) = \kappa > \aleph_0$, on a $\beta < \kappa$. De plus, β est alors un point limite de C et de D, il appartient donc à $C \cap D$.

3. Montrer que, pour tout ordinal $0 < \lambda < \kappa$, et toute famille $(C_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ de clubs de κ, l'intersection $\bigcap_{\alpha<\lambda} C_\alpha$ est encore un club.
   (On pourra raisonner par récurrence transfinie.)

   Corrigé. *On montre le résultat par récurrence transfinie sur $\lambda < \kappa$. Pour $\lambda = 1$ c'est évident.*

   Soit $1 < \lambda < \kappa$ et une famille $(C_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ de clubs de κ tel que pour tout $0 < \beta < \kappa$ l'intersection $\bigcap_{\alpha<\beta} C_\alpha$ est encore un club.

Si $\lambda = \gamma + 1$ est un ordinal successeur alors le résultat est évidemment vérifié pour λ d'après la question précédente car $\bigcap_{\alpha<\lambda} C_\alpha = \left(\bigcap_{\alpha<\gamma} C_\alpha\right) \bigcap C_\gamma$.

Il reste à montrer le résultat dans le cas où λ est un ordinal limite. De même que dans la question précédente, si δ est un point limite de $\bigcap_{\alpha<\lambda} C_\alpha$ alors il est point limite de chaque C_α pour $\alpha < \lambda$ et ainsi, il appartient à $\bigcap_{\alpha<\lambda} C_\alpha$. Vérifions pour conclure que $\bigcap_{\alpha<\lambda} C_\alpha$ n'est pas borné. Pour cela on considère $\delta < \kappa$ et on construit par récurrence transfinie une suite strictement croissante $(\xi_\beta)_{\beta<\lambda}$ telle que $\xi_0 = \delta$ et pour tout $0 < \beta < \lambda$, on ait $\xi_\beta \in \bigcap_{\alpha<\beta} C_\alpha$: en effet, posons $\xi_0 = \delta$, puis pour $\beta = \gamma + 1$ successeur, on sait qu'il existe $\xi_\beta \in \bigcap_{\alpha<\beta} C_\alpha$ tel que $\xi_\beta > \xi_\gamma$ car cette intersection n'est pas bornée, et enfin pour β limite on pose $\xi_\beta = \sup\{\xi_\gamma \colon \gamma < \beta\}$. Dans ce dernier cas, ξ_β est un ordinal limite qui appartient à κ car κ est régulier et de plus c'est un point limite de chaque C_α pour $\alpha < \beta$, donc $\xi_\beta \in \bigcap_{\alpha<\beta} C_\alpha$. Finalement, on pose $\xi = \sup\{\xi_\beta \colon \beta < \lambda\}$, et avec les même arguments que ci-dessus, on conclut que $\delta < \xi \in \bigcap_{\alpha<\lambda} C_\alpha$.

4. Étant donnée une famille $(X_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ de parties de κ, on définit son *intersection diagonale* $\underset{\alpha<\kappa}{\Delta} X_\alpha$ en posant
$$\underset{\alpha<\kappa}{\Delta} X_\alpha = \{\xi < \kappa \colon \xi \in \bigcap_{\alpha<\xi} X_\alpha\} \ .$$
En utilisant le résultat de la question précédente, montrer que si $(X_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ sont des clubs de κ alors leur intersection diagonale est encore un club.

Corrigé. *Remarquons que si on remplace chaque X_α par $\bigcap_{\beta\leq\alpha} X_\beta$, l'intersection diagonale est inchangée. On peut donc supposer d'après la question précédente que la suite $(X_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ est une suite décroissante de clubs.*

Posons $\Delta = \underset{\alpha<\kappa}{\Delta} X_\alpha$. Soit $\beta < \kappa$ un point limite de Δ. On doit vérifier que $\beta \in X_\alpha$ pour tout $\alpha < \beta$. Soit $\alpha < \beta$ et $Y_\alpha = \{\xi \in \Delta \colon \alpha < \xi < \beta\}$. Par définition de Δ, on a $Y_\alpha \subset X_\alpha$. De plus, comme β est un point limite de Δ et X_α est un club, on a $\beta = \sup(Y_\alpha) \in X_\alpha$.

Vérifions que Δ est non borné. Soit $\alpha < \kappa$. Comme $(X_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ est une famille de clubs, on peut construire par récurrence une suite strictement croissante $(\beta_i)_{i<\omega}$ d'éléments de κ tel que $\beta_0 = \alpha$ et $\beta_{i+1} \in X_{\beta_i}$ pour tout $i < \omega$. Alors, $\beta = \sup\{\beta_i \colon i < \omega\}$ est un ordinal limite appartenant à κ. De plus comme la suite $(X_\gamma)_{\gamma<\kappa}$ est décroissante, β est un point limite de X_{β_i} pour tout i et donc $\beta \in \bigcap_{i<\omega} X_{\beta_i} = \bigcap_{\gamma<\beta} X_\gamma$. Ainsi, $\beta \in \Delta$ et Δ est donc un club.

5. Étant donné un ensemble S d'ordinaux, on dit qu'une fonction définie sur S et à valeurs ordinales est *régressive* si $f(\alpha) < \alpha$ pour tout $\alpha \in S$ tel que $\alpha > 0$.
Un sous-ensemble S de κ est *stationnaire* si $S \cap C \neq \emptyset$ pour tout club C de κ.
Démontrer le *lemme de Fodor* : si f est une fonction régressive sur un sous-ensemble stationnaire $S \subseteq \kappa$, alors il existe un ensemble stationnaire $T \subseteq S$ et $\gamma < \kappa$ tels que $f(\alpha) = \gamma$ pour tout $\alpha \in T$.

Corrigé. *Supposons le résultat faux. Alors, pour tout $\gamma < \kappa$, l'ensemble $S_\gamma = \{\alpha \in S \colon f(\alpha) = \gamma\}$ n'est pas stationnaire, et il existe donc un club C_γ tel que $S_\gamma \cap C_\gamma = \emptyset$. Soit $\Delta = \underset{\alpha<\kappa}{\Delta} C_\alpha$. D'après la question précédente Δ est un club et d'après la question 2, l'ensemble $S \cap \Delta$ est encore stationnaire. Mais alors, si $\alpha \in S \cap \Delta$, on a $\alpha \in S \cap C_\gamma$ et donc $f(\alpha) \neq \gamma$, pour tout $\gamma < \alpha$. Ainsi, f ne peut-être régressive.*

Problème 3. Si X est un ensemble, une *chaîne* de sous-ensembles de X est une famille $(C_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles de X, où I est muni d'un ordre total $\prec$ et on a $C_i \subseteq C_j$ dès que $i \prec j$.
On rappelle que l'hypothèse du continu est l'énoncé selon lequel $|\mathbb{R}| = \aleph_1$. Montrer que l'hypothèse du continu est vraie si, et seulement si, $\mathbb{R}$ est la réunion d'une chaîne d'ensembles dénombrables.
Corrigé. *Comme $\aleph_1 = \sup\{\lambda \colon \lambda < \aleph_1\}$, il est réunion de la chaîne des ordinaux dénombrables et donc l'implication est évidente. Réciproquement, supposons que $\mathbb{R}$ est égal à $\bigcup_{i\in I} C_i$, union d'une chaîne de parties dénombrables. Soit X un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ de cardinalité $\aleph_1$ (rappelons que $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0} \geq \aleph_1$). Pour tout $x \in X$, choisissons $i(x) \in I$ tel que $x \in C_{i(x)}$. Notons qu'il n'existe pas de $j \in I$ tel que pour tout $x \in X$, on ait $i(x) \prec j$: sinon, par la propriété de chaîne, on aurait $X \subseteq C_j$ ce qui est impossible car C_j est dénombrable. Ainsi, la famille des $i(x)$ n'est pas majorée dans I et donc, à nouveau par la propriété de chaîne, on a $\mathbb{R} = \bigcup_{x\in X} C_{i(x)}$, d'où $|\mathbb{R}| \leq \aleph_1 \cdot \aleph_0 = \aleph_1$.*