Partiel du 13/11/18

Exercice I : Soit $A \subseteq \Pi$ finie et $f : A \to \Pi$ un automorphisme partiel de domaine A. Enumérons $A = \{a_0, \dots, a_n\}$.

Soit O l'orbite de $(a_0, \dots, a_n)$ pour l'action $G \curvearrowright \Pi^{n+1}$.

On a $R_O(a_0, \dots, a_n)$ donc aussi $R_O(f(a_0), \dots, f(a_n))$.

Par conséquent, il existe $g \in G$ tq $(f(a_0), \dots, f(a_n)) = (g(a_0), \dots, g(a_n))$.

Puisque $G \leq \mathrm{Aut}(\Pi)$ (en fait $G = \mathrm{Aut}(\Pi)$), on vient de produire un automorphisme de Π qui étend f : M est homogène $\square$

(Supposons (i) vraie)

Exercice II : 1. L'orbite $G.x_0$ est métrisable, et est l'image de l'espace polonais G par l'application $g \mapsto gx_0$, supposée continue et ouverte : par le théorème de Hausdorff, $G.x_0$ est polonais. Donc $G.x_0$ est G_δ dans $\overline{Gx_0}$ par le théorème d'Alexandrov, et est dense dans $\overline{Gx_0}$ par définition.

Donc (ii) est vraie : (i) implique (ii).

2. Par définition de la topologie quotient, dire que φ est continue équivaut à affirmer que $g \mapsto gx_0$ est continue, ce qui est vrai par hypothèse.

Si φ est un homéomorphisme, alors $g \mapsto gx_0$ est la composition de la projection $\pi : G \to G/H$ (qui est ouverte) et d'un homéomorphisme. Donc $g \mapsto gx_0$ est ouverte.

Si $g \mapsto gx_0$ est ouverte : on sait que φ est continue, et bijective (identification d'une orbite à G/H, H stabilisateur d'un point de l'orbite). Reste à montrer que φ est ouverte.

Soit donc V un ouvert de G/H ; il existe U ouvert de G tel que $V = \pi(U)$. $\varphi(V) = \{uhx_0 : u \in U, h \in H\}$

$= \{ux_0 : u \in U\}$

est ouvert puisque $g \mapsto gx_0$ est ouverte.

3. Soit (U_n) une base de la topologie de G/H.
$\varphi(U_n)$ est l'image continue et injective de U_n, et est donc borélien dans X ; par conséquent $\varphi(U_n)$ est Baire-mesurable.
(On pouvait aussi dire que $\varphi(U_n)$ est analytique, donc Baire-mesurable)
Donc pour tout n il existe $O_n \subseteq X$ ouvert et $M_n \subseteq X$ maigre tels que $\varphi(U_n) \Delta O_n = M_n$. Soit $\Omega = X \setminus \bigcup_n M_n$, qui est comaigre.

Pour tout n, $\varphi(U_n) \cap \Omega = O_n \cap \Omega$ est ouvert dans Ω.
Si U est un ouvert quelconque, on a $I \subseteq \mathbb{N}$ tq $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, donc $\varphi(U) \cap \Omega = \bigcup_i (U_i \cap \Omega)$ est ouvert dans Ω.

4. Σ est l'intersection de deux parties comaigres et est donc comaigre.

Pour montrer que φ^{-1} est continue sur Σ, soit $(g_n x_0) \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $g x_0 \in \Sigma$; on veut montrer que $g_n H \to gH$.
Soit donc U un ouvert contenant gH. On sait que $V := \varphi(U) \cap \Sigma$ est un ouvert de Σ (puisque $\Sigma \subseteq \Omega$), et $g x_0 \in V$.
Donc $g_n x_0 \in V$ pour n suffisamment grand, i.e $g_n H \in U$.
Par conséquent $g_n H \to gH$: φ^{-1} est continue sur Σ.

5. On a : $\forall^* x \in X \quad x \in \Sigma$ puisque Σ est comaigre.
Donc aussi, puisque l'action est C^0 : $\forall g \in G \quad \forall^* x \quad gx \in \Sigma$
Par Kuratowski-Ulam : $\forall^* x \in X \quad \forall^* g \in G \quad gx \in \Sigma$, i.e $\forall^* x \quad x \in \Sigma_1$.

De plus, Σ_1 est G-invariante : soit $x \in \Sigma_1$ et $h \in G$.
Alors $\forall^* g \quad gx \in \Sigma$, donc $\forall^* g \quad (gh^{-1}) h x \in \Sigma$
Comme la translation à droite $g \mapsto gh^{-1}$ est un homéomorphisme de G : $\forall^* g \quad g(hx) \in \Sigma$, i.e $hx \in \Sigma_1$.
Donc Σ_1 est G-invariant, et rencontre Gx_0 puisque ces deux parties sont comaigres : $Gx_0 \subseteq \Sigma_1$.

6. On sait que $\begin{cases} \forall n \ \forall^* h \quad h g_n x_0 \in \Sigma \\ \forall^* h \quad h g x_0 \end{cases}$ (puisque $\Sigma_1 \supseteq Gx_0$)

Donc $A_n := \{h : hg_nx_0 \in \Sigma\}$ et $A := \{h : hgx_0 \in \Sigma\}$ sont comaigres

par conséquent $A \cap \bigcap_n A_n$ est comaigre, donc non vide.

Soit $h \in A \cap \bigcap_n A_n$: $\forall n$ $hg_nx_0 \in \Sigma$, et $hgx_0 \in \Sigma$.

7. Soit g_n, g tels que $g_nx_0 \to gx_0$. On trouve $K \in G$ tel que $Kg_nx_0 \in \Sigma$ et $Kgx_0 \in \Sigma$.

Comme φ^{-1} est C^0 sur Σ, $Kg_nH \to KgH$.

En translatant à gauche par K^{-1} : $g_nH \to gH$: φ^{-1} est continue.

(l'action à gauche $G \curvearrowright G/H$ est bien continue !) ☐

Exercice III : 1. (a) Dire que $x \in X \setminus C$ revient à dire que x est contenu dans un ouvert dénombrable, donc $X \setminus C$ est la réunion de tous les ouverts dénombrables de X, et par Lindelöff il existe une famille dénombrable d'ouverts dénombrables O_i tels que $X \setminus C = \bigcup_i O_i$: $X \setminus C$ est un ouvert dénombrable.

(b) C est fermé dans X, et donc polonais. De plus, pour tout $x \in C$, tous ses voisinages sont infinis car non dénombrables (dans C : on a enlevé seulement un ensemble dénombrable au voisinage non dénombrable de x dans X). Donc x n'est pas isolé : C n'a pas de points isolés.

2. (a) Soit U un ouvert non vide de Y. Si U est dénombrable, disons $U = \{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, alors il doit exister n tel que $\{u_n\}$ est d'intérieur non vide dans U (par Baire dans U), donc u_n est isolé dans U et donc dans Y, contradiction.

(b) On a $x \neq y \in U$. Pour δ suffisamment petit, (et $\leq \frac{\varepsilon}{2}$) $B(x, \delta] \cap B(y, \delta] = \emptyset$. Alors $V := B(x, \delta[$, $W := B(y, \delta[$ conviennent.

2(c) Par récurrence, on peut maintenant construire des ouverts $(U_s)_{s\in\{0,1\}^{<\mathbb{N}}}$ tels que :

$\begin{cases} \bullet \text{ Chaque } U_s \text{ est infini ;} \\ \bullet\ \forall s \forall i\in\{0,1\}\ \overline{U_{s\frown i}} \subseteq U_s \text{ et } U_{s\frown 0}\cap U_{s\frown 1}=\emptyset \\ \bullet\ \forall s\quad \operatorname{diam}(U_s)\leq 2^{-|s|} \end{cases}$

(il suffit d'appliquer 2(b) à U_s pour produire $U_{s\frown 0}, U_{s\frown 1}$.

Alors, pour tout $\alpha\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $\bigcap\limits_n U_{\alpha|n}$ est un singleton, noté $f(\alpha)$.

De plus, si $\alpha\neq\beta$ soit On a n tq $\alpha_{|n}=\beta_{|n}$ et $\alpha(n)\neq\beta(n)$.

Alors $f(\alpha)\in U_{\alpha_{|n+1}}$, $f(\beta)\in U_{\beta_{|n+1}}$, qui sont disjoints : $f(\alpha)\neq f(\beta)$

donc f est injective.

Enfin, si $\alpha_{|n}=\beta_{|n}$ alors $d(f(\alpha), f(\beta))\leq 2^{-n}$ donc f est C^0.

On vient bien de construire une injection continue de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ dans Y.

3. Soit A un borélien de X.
On sait qu'il existe une topologie $\tilde{\tau}$ polonaise sur X, qui étend la topologie τ de X, et pour laquelle A est ouvert-fermé.
Si A n'est pas dénombrable, $(A,\tilde{\tau})$ est polonais non dénombrable et (par (1)) contient un polonais non vide C sans points isolés.

Par (2c), on a $f:\{0,1\}^{\mathbb{N}}\to(C,\tilde{\tau})$ continue et injective,

et alors $f:\{0,1\}^{\mathbb{N}}\to(A,\tau)$ est continue et injective

$\square$