**Université Claude Bernard - Lyon 1** — **Semestre de printemps 2023-2024**

Master mathématiques et applications — Analyse Fonctionnelle 2

---

**Contrôle partiel du 12 mars 2024 (durée 2h)**

---

*L'emploi de documents, calculatrices, etc. n'est pas autorisé. Lors de la correction une grande attention sera portée à la qualité de la rédaction.*

**Exercice 1.** Soit $X$ un espace vectoriel normé, $(x_1, \dots, x_n)$ une famille libre d'éléments de $X$ et $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbf{R}^n$. Montrer qu'il existe une forme linéaire continue $f$ telle que $f(x_i) = c_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

**Exercice 2.** Montrer qu'il existe une forme linéaire continue $T\colon (L^\infty([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbf{R}, |\cdot|)$ de norme 1 et telle que pour toute $f \in C([0,1], \mathbf{R})$ on ait $T(f) = f\left(\frac{1}{2}\right)$.

**Exercice 3.** Montrer que tout espace métrique compact est séparable.

**Exercice 4.** Dans cet exercice, pour $p \in [1, +\infty]$ on munit $L^p([0,1])$ de sa norme usuelle notée $\|\cdot\|_p$. On considère un sous-espace vectoriel fermé $X$ de $L^1([0,1])$ tel que $X \subseteq \displaystyle\bigcup_{1<p\le+\infty} L^p([0,1])$. On souhaite montrer qu'il existe $q > 1$ tel que $X \subseteq L^q([0,1])$.

Pour alléger un peu la notation, pour $n \geq 1$ on note $q_n = 1 + \frac{1}{n}$. Pour $n \in \mathbf{N}^*$ on considère

$$X_n = \{f \in X \cap L^{q_n}([0,1])\colon \|f\|_{q_n} \leq n\}$$

1. Montrer que chaque $X_n$ est fermé dans $(X, \|\cdot\|_1)$ (*on pourra penser à utiliser le lemme de Fatou*).
2. Montrer que $X = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} X_n$.
3. Montrer qu'il existe $n$ tel que $X_n$ est d'intérieur non vide dans $X$.
4. Conclure.

**Exercice 5.** Soit $X$ un espace de Banach. Dans cet exercice on fixe une suite $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $X$ dont on suppose qu'elle est une *base de Schauder*, c'est-à-dire que pour tout $x \in X$ il existe une unique suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e_n$.

Pour $x$ et $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tels que $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e_n$, on pose $\varphi_n(x) = a_n$. On considère pour $n \in \mathbf{N}$ l'application linéaire $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \varphi_k e_k$ et on souhaite établir que chaque $P_n$ est continue et que $\sup\{\|P_n\|\colon n \in \mathbf{N}\} < +\infty$.

1. On considère l'ensemble $\Sigma$ formé par toutes les suites $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ telles que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e_n$ converge.
   (a) Montrer que $\Sigma$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.
   (b) Pour $a \in \Sigma$ on pose
   $$N(a) = \sup\left\{\left\|\sum_{i=k}^{p} a_i e_i\right\| : (k,p) \in \mathbf{N}^2 \text{ et } k \leq p\right\}$$
   Montrer que $N$ est une norme sur $\Sigma$.
   (c) Montrer que $(\Sigma, N)$ est un espace de Banach.

On considère l'application linéaire $T \colon \Sigma \to X$ définie par $T(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e_n$.

2. Montrer que $T \colon (\Sigma, N) \to (X, \|\cdot\|)$ est continue et bijective.
3. Montrer qu'il existe $M \in \mathbf{R}$ telle que pour tout $x \in X$ on ait

$$\sup \left\{ \left\| \sum_{i=k}^{p} \varphi_i(x) e_i \right\| : (k,p) \in \mathbf{N}^2 \text{ et } k \leq p \right\} \leq M \|x\|$$

4. Montrer que $\varphi_n$ est continue pour tout $n \in \mathbf{N}$.
5. Conclure.