Université Claude Bernard Lyon I — 2nd semestre 2015/2016
Master 1 — Introduction à la logique mathématique

Examen partiel du 9 mars 2016. Durée 2h

Dans tous les exercices on se place dans ZFC. Lors de la correction, une attention particulière sera portée à la rédaction des copies.

Exercice 1

1. Montrer que $\prod_{\alpha<\omega+\omega} \aleph_\alpha = \aleph_{\omega+\omega}^{\aleph_0}$.
2. Calculer $\prod_{\alpha<\omega_1+\omega} \aleph_\alpha$.

Exercice 2
Dans cet exercice κ désigne un cardinal infini, et $[\kappa]^\kappa$ l'ensemble des parties de κ de cardinal κ. Une suite $(A_\alpha)_{\alpha<\gamma}$ d'éléments de $[\kappa]^\kappa$ est dite *presque disjointe* (a.d) si on a $|A_\beta \cap A_\alpha| < \kappa$ pour tout $\alpha \neq \beta < \gamma$. Une telle suite est dite *maximale presque disjointe* (m.a.d) si elle est presque disjointe et pour tout $B \in [\kappa]^\kappa$ il existe $\alpha < \gamma$ tel que $|B \cap A_\alpha| = \kappa$.

1. Montrer qu'une partition de κ en moins de $\mathrm{cof}(\kappa)$ pièces (chacune de cardinal κ) est nécessairement m.a.d.
2. Dans cette question on suppose κ régulier, et $(A_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ est une suite presque disjointe. Montrer que cette suite n'est pas m.a.d (on pourra commencer par justifier le fait que, pour tout α, $A_\alpha \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$ est non vide, et utiliser un argument diagonal).

Exercice 3 Dans cet exercice on fixe deux cardinaux infinis κ et λ, avec $\lambda > 2^\kappa$. On considère aussi une suite $(f_\alpha)_{\alpha<\lambda}$, où pour tout α on a $f_\alpha \in \kappa^\lambda$.

Pour deux ensembles $X, Y \subseteq \lambda$, on notera $X \trianglelefteq Y$ si $X \subseteq Y$ et, pour tout $A \subseteq X$ de cardinalité inférieure ou égale à κ, et tout $\alpha < \lambda$, il existe $\beta \in Y$ tel que f_α et f_β coïncident sur A.

1. Dans cette question on souhaite montrer que pour tout $X \subseteq \lambda$ de cardinal $\leq 2^\kappa$, il existe $Y \subseteq \lambda$ de cardinal $\leq 2^\kappa$ et tel que $X \trianglelefteq Y$. On fixe un tel X.
   (a) Montrer qu'il y a au plus 2^κ sous-parties de X de cardinal $\leq \kappa$ et que, pour toute telle partie A, il y a au plus 2^κ applications de A dans κ.
   (b) Montrer que pour tout $A \subseteq X$ de cardinal $\leq \kappa$ il existe un ensemble $Y_A \subseteq \lambda$ de cardinal $\leq 2^\kappa$ et tel que pour tout $\alpha < \lambda$ il existe $\beta \in Y_A$ tel que f_α et f_β coïncident sur A.
   (c) Montrer que l'ensemble
   $$Y = X \cup \bigcup_{A \subseteq X \ \mathrm{card}(A) \leq \kappa} Y_A$$
   a la propriété souhaitée.
2. On veut maintenant prouver l'existence de $X \subseteq \lambda$ de cardinal $\leq 2^\kappa$ et tel que $X \trianglelefteq X$.
   (a) Montrer qu'il existe une suite $(X_\xi)_{\xi<\kappa^+}$ de parties de λ de cardinal $\leq 2^\kappa$ et telle que pour tout $\xi < \kappa^+$ n ait $X_\xi \trianglelefteq X_{\xi+1}$.
   (b) Montrer que $X = \bigcup_{\xi<\kappa^+} X_\xi$ convient.
3. Etant donné un ensemble A, on note $[A]^2$ l'ensemble des parties de A à 2 éléments. On fixe une application $c\colon [\lambda]^2 \to \kappa$, et on souhaite établir l'existence d'une partie $A \subseteq \lambda$ de cardinal κ^+ et sur telle que la restriction de c à $[H]^2$ soit constante.
   Pour cela, on introduit, pour tout $\alpha < \lambda$, l'application $f_\alpha\colon \lambda \to \kappa$ définie par $f_\alpha(\alpha) = 0$ et, pour tout $\beta \neq \alpha$, $f_\alpha(\beta) = c(\{\alpha, \beta\}) + 1$. On considère la relation $\trianglelefteq$ associée à cette suite, on choisit X tel qu'obtenu dans la question précédente, et on fixe $\alpha \in \lambda \setminus X$.

(a) Montrer qu'il existe une suite $(\alpha_\xi)_{\xi<\kappa^+}$ d'éléments de X telle que, pour tout $\xi < \kappa^+$, les fonctions f_{α_ξ} et f_α coïncident sur $A_\xi = \{\alpha_\zeta \colon \zeta < \xi\}$.

(b) Montrer que cette suite est injective (on pourra considérer $f_{\alpha_\xi}(\alpha_\zeta)$).

(c) On pose $A = \{\alpha_\xi \colon \xi < \kappa^+\}$. Montrer qu'il existe $B \subseteq A$ de cardinal κ^+ et tel que f_α soit constante sur B.

(d) Conclure.