Université Claude Bernard - Lyon 1 — **Semestre d'automne 2024-2025**

Master mathématiques et applications — Analyse Fonctionnelle 1

Examen partiel du 21 octobre 2024 (durée: 2h30)

L'emploi de documents, calculatrices, etc. n'est pas autorisé. Le sujet comporte 3 exercices indépendants.

Exercice 1. Dans cet exercice, on note c l'espace des suites réelles convergentes, et c_0 l'espace des suites réelles qui tendent vers 0 en $+\infty$. On les munit de $\|\cdot\|_\infty$, définie par $\|x\|_\infty = \sup\{|x(n)|: n \in \mathbf{N}\}$.

1. Montrer que $(c, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.
2. Montrer que l'application $L: x \mapsto \lim\limits_{n\to+\infty} x(n)$ est continue sur c, puis que $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.
3. Soit E l'espace des suites réelles ne prenant qu'un nombre fini de valeurs non nulles. Montrer que E est dense dans $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$.
4. Soit $u \in \ell^1(\mathbf{N}, \mathbf{R})$. Pour $x \in c_0$ on pose

$$T_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)u(n)$$

   (a) Montrer que T_u est bien définie, continue, et que $\|T_u\| = \|u\|_1$.

   (b) Soit φ une forme linéaire continue sur c_0. On note e_n l'élément de c_0 tel que $e_n(n) = 1$ et $e_n(i) = 0$ si $i \neq n$; on pose $u(n) = \varphi(e_n)$.
   Montrer que $u \in \ell^1(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ et que $T_u = \varphi$.

   (c) Montrer que le dual topologique de c_0 est linéairement isométrique à $\ell^1(\mathbf{N}, \mathbf{R})$.

Remarque : le dual topologique de c est aussi linéairement isométrique à ℓ^1. Les espaces c et c_0 sont linéairement isomorphes mais ne sont pas linéairement isométriques.

Exercice 2. Soit H un espace de Hilbert, $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une base hilbertienne de H et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une famille orthonormée. On suppose que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \|e_n - f_n\|^2$ converge et on fixe $N \in \mathbf{N}$ tel que $\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} \|e_n - f_n\|^2 < 1$.
On note E l'espace vectoriel engendré par $\{e_0, \dots, e_N\} \cup \{f_n: n \geq N+1\}$.

1. Soit $x \in E^\perp$.

   (a) Justifier que $\|x\|^2 = \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 = \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} |\langle x, e_n - f_n\rangle|^2$.

   (b) Montrer que $x = 0$.
2. Montrer que E est dense dans H.

Soit $F = \mathrm{Vect}\{f_n: n \geq N+1\}$.

3. Montrer que $F^\perp$ est de dimension finie majorée par $N+1$.
4. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une base hilbertienne de H.

Exercice 3. Soit $d \in \mathbf{N}^*$. On munit $\mathbf{R}^d$ de la norme euclidienne usuelle, notée $\|\cdot\|$.
On dit qu'une partie $C \subset \mathbf{R}^d$ est un *arc rectifiable* s'il existe $f: [0,1] \to \mathbf{R}^d$ lipschitzienne et telle que $f([0,1]) = C$. Dans cet exercice on fixe un arc rectifiable C.

1. Montrer que C est compact.
2. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}^d$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on ait $f_n([0,1]) = C$, et que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers $f: [0,1] \to \mathbf{R}^d$.
   Montrer que $f([0,1]) = C$ (on pourra procéder par double inclusion).
3. On définit la *longueur d'arc* $\ell(C)$ par

$$\ell(C) = \inf\left\{K \geq 0: \text{ il existe } f: [0,1] \to \mathbf{R}^d \text{ } K\text{-lipschitzienne et telle que } f([0,1]) = C\right\}$$

   Montrer qu'il existe une surjection lipschitzienne de $[0,1]$ sur C dont la constante de Lipschitz est égale à $\ell(C)$.