2012/2013 Semestre d'automne
Université Lyon I Master EADM

Premier écrit blanc d'analyse, 26 septembre 2012, durée 5h.

L'usage de tout appareil électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est interdit, ainsi que l'emploi de documents (notes de cours, etc). Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, elle (il) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

Les problèmes ci-dessous sont indépendants ; néanmoins, des résultats obtenus dans un problème peuvent être utiles dans un autre problème, dans ce cas on pourra les y utiliser sans démonstration.

Problème 1.

Ici, on va redémontrer des résultats élémentaires d'analyse réelle ; durant toute la durée du problème a, b sont deux réels tels que $a < b$ et f est une fonction définie sur $[a, b]$ et à valeurs réelles.

1. Dans cette question on suppose f continue.
   - (a) On pose $A = f([a, b])$; si A est majorée, on appelle M sa borne supérieure, sinon on pose $M = +\infty$. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $[a, b]$ tels que $f(x_n) \to M$ quand n tend vers $+\infty$.
   - (b) A l'aide du théorème de Bolzano-Weierstrass [1], en déduire que A est majorée et qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = M$.
   - (c) Montrer que f est bornée et atteint ses bornes.
2.
   - (a) Supposons que f soit dérivable sur $]a, b[$ et que $x \in]a, b[$ soit un maximum de f sur $]a, b[$. Montrer que l'on doit avoir $f'(x) = 0$ (on pourra par exemple raisonner par l'absurde et suppose que $f'(x) \neq 0$).
   - (b) En déduire le théorème de Rolle [2] : si f est dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$, alors il existe $x \in]a, b[$ tel que $f'(x) = 0$.
3. En utilisant le résultat de la question précédente, démontrer le théorème des accroissements finis : si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. On pourra par exemple utiliser la fonction auxiliaire g définie sur $[a, b]$ par $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$.
4. A l'aide d'une démonstration par récurrence, démontrer la validité de la formule de Taylor [3] avec reste intégral : si f est $n + 1$-fois continûment dérivable sur $[a, b]$, alors on a

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b - a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b - t)^n \, dt .$$

   (On rappelle que $f^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième de f et, par convention, $f^{(0)} = f$)

1. Bernard Bolzano, mathématicien allemand, 1781–1848 ; Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, mathématicien allemand, 1815-1897.
2. Michel Rolle, mathématicien français, 1652–1719.
3. Brook Taylor, mathématicien britannique, 1685–1731.

Problème 2.
Ce problème porte sur l'étude du reste d'une série de Riemann[4] *convergente. On rappelle que, si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont deux suites réelles, on note* $v_n = O(u_n)$ *si*

$$\exists M \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ n \geq n_0 \Rightarrow |v_n| \leq M|u_n|\ .$$

1. Soit a un réel et $f\colon [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante. Montrer que, pour tout entier $k \in [a+1, +\infty[$, on a
$$\int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx\ . \tag{1}$$
2. En déduire la nature de la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ selon la valeur du réel α. En cas de convergence, on appelle $S(\alpha)$ la somme de cette série.
3. En utilisant l'encadrement obtenu en (1), montrer que pour tout $\alpha > 1$ on a
$$1 \leq S(\alpha) \leq 1 + \frac{1}{\alpha - 1}\ .$$
Dans la suite du problème, on suppose que α *est tel que la série de Riemann converge, et pour tout entier naturel* $n > 0$ *on pose* $R_n(\alpha) = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.
4. (a) En utilisant de nouveau (1), montrer que pour tout $n \geq 2$ on a
$$\frac{n^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \leq R_n(\alpha) \leq \frac{(n-1)^{1-\alpha}}{\alpha - 1}$$
(b) Prouver que $R_n(\alpha) = \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + O(\dfrac{1}{n^\alpha})$.
On va maintenant essayer d'améliorer un peu cette estimation.
5. Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$. En appliquant à f la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ il existe un réel A_k tel que
$$0 \leq A_k \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}} \quad \text{et} \quad f(k+1) - f(k) = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2k^{\alpha+1}} + A_k\ .$$
6. En déduire que
$$R_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \frac{1}{2n^\alpha} + O(\frac{1}{n^{\alpha+1}})\ .$$

Problème 3. *On va ici démontrer le lemme de Cesàro*[5]*, qui sera utilisé dans le prochain problème. On fixe une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de réels qui converge vers un réel* l.

1. Montrer que, pour toute paire d'entiers (n_0, n) tels que $n_0 < n$, on a
$$\left|\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\right) - l\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0} |u_k - l| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n} |u_k - l|\ .$$

4. Georg Friedrich Bernhard Riemann, mathématicien allemand, 1826–1866.
5. Ernesto Cesàro, mathématicien italien, 1859-1906.

2. Soit $\varepsilon > 0$. En utilisant l'inégalité de la question précédente, montrer qu'il existe N tel que $\left| \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k \right) - l \right| \leq 2\varepsilon$ pour tout $n \geq N$.
3. Montrer que la suite $(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l quand n tend vers $+\infty$ (*cet énoncé est appelé lemme de Cesàro*).
4. Application : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels tels que $u_{n+1} - u_n$ tend vers $l \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Donner un équivalent simple de (u_n) quand n tend vers $+\infty$.
5. Que peut-on dire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0 ?

Problème 4.

Dans tout cet énoncé, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels tels que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ait un rayon de convergence égal à 1. On désigne par f la fonction définie sur $]-1, 1[$ par la formule $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, et par (P_1) et (P_2) les deux propriétés suivantes possibles de la suite (a_n) :

(P_1) : la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge.

(P_2) : la fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers 1 (par valeurs inférieures).

Le but du problème est de montrer que (P_1) împlique (P_2) (théorème d'Abel[6]) puis de voir des hypothèses supplémentaires sous lesquelles la réciproque est vraie.

Partie I : Généralités.

1. Donner des exemples de suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant les conditions de l'énoncé et vérifiant : (P_1) et (P_2) ; (P_2) mais pas (P_1) ; ni (P_1) ni (P_2).
2. On suppose que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ est absolument convergente. Montrer qu'alors la série définissant f converge normalement sur $[-1, 1]$ et que l'on a $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.
3. Déduire de la question précédente la somme de la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$.

Partie II : Théorème d'Abel.

1. On suppose dans cette question que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge. On pose $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ et, pour tout $x \in [0, 1]$, $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$.

   (a) Simplifier, pour tout $x \in [0, 1]$, l'expression $\sum_{p=1}^{+\infty} (r_{n+p-1} - r_{n+p}) x^{n+p}$.

6. Niels Henrik Abel, mathématicien norvégien, 1802-1829.

(b) En déduire que, pour tout $x \in [0,1]$, $R_n(x) = r_n x^{n+1} + x^{n+1}(x-1)\sum_{p=1}^{+\infty} r_{n+p}x^{p-1}$.

(c) Soit ε un réel strictement positif. Montrer qu'il existe n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$ et tout entier naturel p on ait $|r_{n+p}| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$, puis que pour tout entier $n \geq n_0$ et tout $x \in [0,1]$ on a $|R_n(x)| \leq \varepsilon$.

(d) Montrer que l'on a $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

2. Retrouver le développement en série entière de $x \mapsto \arctan(x)$, puis utiliser le théorème d'Abel pour écrire $\dfrac{\pi}{4}$ comme somme d'une série numérique.

   On rappelle que le produit de Cauchy[7] *de deux séries absolument convergentes est une série absolument convergente.*

3. Soit $\sum_{n+0}^{+\infty} u_n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ deux séries de nombres réels. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ et on suppose que les trois séries $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n$ convergent. Montrer, à l'aide du théorème d'Abel, qu'on a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = (\sum_{n=0}^{+\infty} u_n)(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n) \ .$$

4. Le produit de Cauchy de deux séries convergentes est-il toujours une série convergente ?

Partie II. Réciproque du théorème d'Abel ; un premier théorème taubérien.

On a déjà observé que la réciproque du théorème d'Abel est fausse en général ; dans cette partie on prouve qu'elle devient vraie si l'on suppose que a_n est négligeable devant $\frac{1}{n}$; c'est le premier exemple de « théorème taubérien », ainsi nommé en l'honneur de son auteur, A. Tauber[8].

1. Donner un exemple de suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $b_n = o(\frac{1}{n})$ mais $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ diverge.

   Dans la suite de cette partie, on suppose que $a_n = o(\frac{1}{n})$.

2. On pose $M_n = \sup\limits_{k>n} |ka_k|$. Montrer que $M_n \to 0$ quand n tend vers $+\infty$.

3. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout entier $k \geq 1$, on a $1 - x^k \leq k(1-x)$.

4. Montrer que, pour tout $x \in [0,1[$ et tout entier n, on a

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k - f(x)\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k|(1-x^k) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k| x^k \ .$$

5. En déduire que , pour tout $x \in [0,1[$ et tout entier n, on a

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k - f(x)\right| \leq (1-x)\sum_{k=0}^{n} k|a_k| + \frac{M_n}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k \ .$$

   On suppose dans la suite de cette partie que $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ existe (dans $\mathbb{R}$)

7. Augustin Louis Cauchy, mathématicien français, 1789–1857.
8. Alfred Tauber, mathématicien autrichien, 1866–1942.

6. Montrer que $\dfrac{M_n}{n} \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} (1-\frac{1}{n})^k$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

7. A l'aide du lemme de Cesàro, montrer que $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k|a_k|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

8. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge et que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \lim_{x\to 1^-} f(x)$.

Partie III. Théorème de Littlewood.
On va maintenant montrer un théorème taubérien plus fort que le précédent, dû à J.E. Littlewood[9]*. On conserve les mêmes notations que précédemment, mais on suppose cette fois seulement que* $a_n = O(\frac{1}{n})$ *quand* n *tend vers* $+\infty$*. On suppose aussi que* $f(x) \to 0$ *quand* $x \to 1^-$*.*
Dans la suite, on note g *la fonction définie sur* $[0,1]$ *par* $g(x) = \begin{cases} 0 & si\ 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & si\ \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$*, et on appelle* $\mathcal{E}$ *l'espace formé par toutes les fonctions* $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ *telles que :*

(i) $\forall x \in [0,1[\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\varphi(x^n)$ converge.

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\varphi(x^n) = 0.$

On va montrer que g *appartient à* $\mathcal{E}$*, et en déduire que (sous nos hypothèses) que* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 0.$

1. Montrer que g satisfait la condition (i) ci-dessus.
2. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel (pour les lois usuelles).
3. (a) Montrer que, pour tout $m \geq 1$, la fonction définie sur $[0,1]$ par $x \mapsto x^m$ appartient à $\mathcal{E}$.
   (b) Montrer que pour tout polynôme $p \in \mathbb{R}[X]$ de coefficient constant nul, la fonction polynomiale sur $[0,1]$ associée à p appartient à $\mathcal{E}$.
4. Etant donné $q \in \mathbb{R}[X]$, démontrer l'égalité

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^n q(x^n) = \int_0^1 q(t)\,dt\ .$$

   (On pourra commencer par traiter le cas où $q(X) = X^m$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$).

5. Pour $x \in]0,1[$, on pose $h(x) = \dfrac{g(x)-x}{x(1-x)}$. Représenter le graphe de h ; montrer que h se prolonge par continuité en 0 et en 1 et que la fonction ainsi obtenue est continue par morceaux sur $[0,1]$.
   On rappelle que, étant donnée une fonction ψ *continue par morceaux sur* $[0,1]$*, il existe pour tout* $\varepsilon > 0$ *deux fonctions continues* s_1, s_2 *telles que* $s_1 \leq \psi \leq s_2$ *sur* $[0,1]$ *et* $\displaystyle\int_0^1 (s_2(x) - s_1(x))\,dx \leq \varepsilon$*.*
   On rappelle aussi le théorème de Weierstrass : étant donné une fonction ψ *continue sur* $[0,1]$*, et* $\varepsilon > 0$*, il existe un polynôme* $p \in \mathbb{R}[X]$ *tel que* $\displaystyle\sup_{x\in[0,1]} |p(x) - \psi(x)| \leq \varepsilon$*.*

9. John Edensor Littlewood, mathématicien britannique, 1885-1977.

6. On fixe $\varepsilon > 0$.
   (a) En utilisant les deux théorèmes rappelés ci-dessus, montrer qu'il existe deux polynômes $u_1, u_2 \in \mathbb{R}[X]$, tels que $u_1 \leq h \leq u_2$ sur $[0,1]$ et $\displaystyle\int_0^1 (u_2(x) - u_1(x))\, dx \leq 3\varepsilon$.
   (b) On pose $p_1(x) = x + x(1-x)u_1(x)$, $p_2(x) = x + x(1-x)u_2(x)$ et $q(x) = \dfrac{p_2(x) - p_1(x)}{x(1-x)}$.
   Montrer que $p_1(0) = p_2(0)$, $p_1(1) = p_2(1) = 1$, et $\displaystyle\int_0^1 q(x)\, dx \leq 3\varepsilon$.
   (c) On pose $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} |na_n|$. En utilisant le fait que $1 - x^n \leq n(1-x)$ pour tout entier n, montrer que

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n p_1(x^n) \right| \leq M \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}(1-x^n) q(x^n) \leq M(1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} x^n q(x^n) \ .$$

   (d) Prouver que $g \in \mathcal{E}$.
7. (a) Montrer que pour tout n il existe $\delta \in]0,1[$ tel que

$$x \in [1-\delta, 1] \Rightarrow \forall k \in \{0, \ldots, n\} x^k \in [\frac{1}{2}, 1] \ .$$

   (b) En utilisant le fait démontré ci-dessus et le fait que $g \in \mathcal{E}$, montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge et vaut 0.
8. Que pouvez-vous dire sur les résultats obtenus dans ce problème dans le cas où (a_n) est une suite de nombres complexes ?