Premier écrit blanc d'analyse - Correction.

Problème 1.

Préliminaires.

1. Fixons une paire d'entiers (n_0, n) tels que $n_0 < n$. On a
$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\right) - l = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k - l\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0}(u_k - l) + \sum_{k=n_0}^{n}(u_k - l)\right) .$$
En appliquant l'inégalité triangulaire, on obtient donc
$$\left|\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\right) - l\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0}|u_k - l| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n}|u_k - l| .$$
2. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque (u_n) tend vers l, on sait qu'il existe n_0 tel que $|u_n - l| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. Fixons un tel entier n_0. Puisque $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0}|u_k - l|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, il existe n_1 tel que cette quantité soit plus petite que ε pour tout $n \geq n_1$. Pour $N = \max(n_0, n_1)$, on déduit de l'inégalité de la question précédente que $\displaystyle\left|\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\right) - l\right| \leq 2\varepsilon$ pour tout $n \geq N$.
3. C'est une simple reformulation du résultat de la question précédente.
4. Si $u_{n+1} - u_n$ tend vers $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, alors le lemme de Cesáro nous permet d'obtenir que $\displaystyle\frac{u_n - u_0}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}$ converge vers l quand n tend vers $+\infty$. Autrement dit, $\displaystyle\frac{u_n}{n}$ converge vers l quand n tend vers $+\infty$; si $l \neq 0$ cela signifie que $u_n \sim nl$.
5. Si jamais $l = 0$, le raisonnement ci-dessus donne $\displaystyle\frac{u_n}{n} \to 0$ quand n tend vers $+\infty$, autrement dit $u_n = o(n)$.

Partie I.

1. Si on prend $a_n = \frac{1}{(n+1)^2}$, alors la série entière correspondante a un rayon de convergence égal à 1 (par d'Alembert, par exemple), satisfait (P_1) (critère de Riemann) et admet une limite finie quand x tend vers 1 puisque la fonction f associée est croissante sur $]0,1[$ (par dérivation terme à terme) et majorée par $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} < +\infty$.
Si on prend $a_n = 1$, alors le rayon de convergence est toujours 1, la série $\sum a_n$ diverge, et on a $f(x) = \frac{1}{1-x}$ pour tout $x \in]-1,1[$: en particulier f n'a pas de limite en 1 et ni (P_1) ni (P_2) ne sont vérifiées.
Si on prend $a_n = (-1)^n$, alors (P_1) n'est pas vérifiée mais $f(x) = \frac{1}{1+x}$ donc f admet une limite finie en 1 : (P_1) n'est pas vérifiée mais (P_2) l'est.
2. On a $\displaystyle\sup_{x\in[-1,1]} |a_n x^n| = |a_n|$. Par conséquent, si $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|$ converge alors la série définissant f converge normalement sur $[-1,1]$; par conséquent, f est continue sur $[-1,1]$ et on a
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n .$$

3. Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n(n-1)}$. Comme $\sum \frac{1}{n(n-1)}$ converge, on peut appliquer le résultat de la question précédente ; de plus, en utilisant le théorème de dérivation terme à terme des séries entières à l'intérieur de leur domaine de convergence, on voit que pour tout $x \in]-1,1[$ on a

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x}$$

Comme $f'(0) = 0$ on en déduit que $f'(x) = \ln(1+x)$ sur $]-1,1[$, et donc (puisque $f(0) = 0$)

$$\forall x \in]-1,1[\quad f(x) = \int_0^x \ln(1+t)\,dt = \int_1^{x+1} \ln(u)\,du = [u(\ln(u)-1)]_1^{x+1} = (x+1)(\ln(x+1)-1)+1 \ .$$

En particulier, on voit que $f(x)$ tend vers $2\ln(2) - 1$ et on conclut finalement que

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n(n-1)} = 2\ln(2) - 1 \ .$$

Partie II.

1. (a) Fixons un entier n et un autre entier $p \geq 1$. Par définition, on a $r_{n+p-1} - r_{n+p} = a_{n+p}$. Par conséquent,

$$\sum_{p=1}^{+\infty} (r_{n+p-1} - r_{n+p}) x^{n+p} = \sum_{p=1}^{+\infty} a_{n+p} x^{n+p} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k = R_n(x) \ .$$

(b) Fixons un entier n. Si $x \in [0,1[$, on sait puisque $r_n \to 0$ (ce qui est vrai puisque $\sum a_n$ converge) que $\sum r_n x^n$ est convergente ; par conséquent, on peut utiliser l'égalité obtenue à la question précédente pour écrire

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \sum_{p=1}^{+\infty} r_{n+p-1} x^{n+p} - \sum_{p=1}^{+\infty} r_{n+p} x^{n+p} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} r_{n+p} x^{n+p+1} - \sum_{p=1}^{+\infty} r_{n+p} x^{n+p} \\ &= r_n x^{n+1} + \sum_{p=1}^{+\infty} r_{n+p} (x^{n+p+1} - x^{n+p}) \\ &= r_n x^{n+1} + (x-1) x^{n+1} \sum_{p=1}^{+\infty} r_{n+p} x^{p-1}. \end{aligned}$$

(c) Soit $\varepsilon > 0$. On a déjà dit que (r_n) tend vers 0, ce qui nous donne l'existence d'un entier n_0 tel que pour tout $m \geq n_0$ on ait $|r_m| \leq \frac{\varepsilon}{2}$; en particulier pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $p \geq 0$ on a bien $|r_{n+p}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. L'égalité obtenue à la question précédente nous permet alors d'écrire que, pour tout entier $n \geq n_0$ et tout $x \in [0,1[$ on a

$$|R_n(x)| \leq |r_n| + (1-x) x^{n+1} \sum_{p=1}^{+\infty} |r_{n+p}| x^{p-1} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} (1-x) x^{n+1} \sum_{p=0}^{+\infty} x^p \ .$$

Puisque $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} x^p = \frac{1}{1-x}$ pour $x \in [0,1[$ on obtient bien que $|R_n(x)| \leq \varepsilon$.

(d) Fixons $\varepsilon > 0$, et trouvons n_0 comme à la question précédente. Alors, pour tout $x \in [0,1[$ on a :

$$\begin{aligned}
\left|f(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right| &= \left|\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n_0} a_k(x^k-1) + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} a_k x^k - \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} a_k\right| \\
&\leq \left|\sum_{k=0}^{n_0} a_k(x^k-1)\right| + |R_{n_0}(x)| + |r_{n_0}| \\
&\leq \left|\sum_{k=0}^{n_0} a_k(x^k-1)\right| + 2\varepsilon
\end{aligned}$$

.

Comme $x \mapsto \sum_{k=0}^{n_0} a_k(x^k-1)$ tend vers 0 quand x tend vers 1 (c'est une somme *finie*), on en déduit que pour x suffisamment proche de 1 on a $\left|f(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right| \leq 3\varepsilon$. On vient de montrer que $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

2. On sait que la dérivée de arctan est $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, dont le développement en série entière sur $]-1,1[$ est $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$. En intégrant terme à terme (ce qu'on peut faire avec un développement en série entière à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence) on obtient que, pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \; .$$

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ est une série alternée, et est donc convergente. Nous sommes donc dans une situation où les hypothèses du théorème d'Abel sont vérifiées, et on peut écrire

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \; .$$

Partie III.

1. Posons par exemple $b_n = \dfrac{1}{n\ln(n)}$ pour $n \geq 1$ (et $b_0 = 0$). Alors, par comparaison à une intégrale on voit que $\sum b_n$ est divergente ; pourtant $b_n = o(\dfrac{1}{n})$.
2. Par définition, dire que $a_n = o(\dfrac{1}{n})$ signifie qu'il existe une suite (u_n) qui tend vers 0 et telle que $a_n = \dfrac{u_n}{n}$, autrement dit, que na_n converge vers 0. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe donc N tel que $n \geq N$ entraîne $|na_n| \leq \varepsilon$. En particulier, pour tout $n \geq N$ on a $M_n \leq \varepsilon$, et on vient de montrer que M_n converge vers 0.
3. Soit $x \in [0,1]$. Pour $x = 1$ il n'y a rien à montrer ; sinon l'égalité des accroissements finis appliquée à la fonction $t \mapsto t^k$ entre x et 1 nous dit qu'il existe $c \in]x,1[$ tel que $1-x^k = kc^k(1-x) \leq k(1-x)$.

4. Fixons $x \in [0,1[$ et un entier n. On a

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n} a_k - f(x)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k\right| \\ &= \left|\sum_{k=0}^{n}(a_k - a_k x^k) - \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k\right| \\ &\leq \left|\sum_{k=0}^{n} a_k(1-x^k)\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k\right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} |a_k|(1-x^k) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k| x^k \ .\end{aligned}$$

5. Fixons $x \in [0,1[$ et un entier n. Puisque $(1-x)^k \leq k(1-x)$, et puisque $|ka_k| \leq M_n$, on obtient à partir de l'inégalité précédente que

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k - f(x)\right| \leq (1-x)\sum_{k=0}^{n} k|a_k| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{M_n}{k} x^k$$

On en déduit, en majorant $\frac{1}{k}$ par $\frac{1}{n}$ dans la somme de droite, que

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k - f(x)\right| \leq (1-x)\sum_{k=0}^{n} k|a_k| + \frac{M_n}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k \ .$$

6. FIxons $n \geq 1$. On a

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}(1-\frac{1}{n})^k = n(1-\frac{1}{n})^{n+1} = n\exp\left((n+1)\ln(1+\frac{1}{n})\right) \sim ne \ .$$

Par conséquent, $\displaystyle\frac{M_n}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}(1-\frac{1}{n})^k \sim eM_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

7. Puisque na_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, le lemme de Cesàro nous permet immédiatement de conclure que $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} k|a_k|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

8. En appliquant le résultat de la question (5) avec $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$, on obtient que, pour tout $n \geq 1$,

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k - f(x_n)\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} k|a_k| + \frac{M_n}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}(1-\frac{1}{n})^k \ .$$

Par conséquent, $\displaystyle\left|\sum_{k=0}^{n} a_k - f(x_n)\right|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Puisque $f(x_n)$ converge vers $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x)$, on a donc finalement obtenu que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \lim_{x\to 1^-} f(x) \ .$$

Problème 2.

Partie I.

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$, et $M = \|g\|_\infty$. Par définition, on a $|g(y)| \leq M$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, ce dont on déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $|f(t)g(x-t)| \leq Mf(t)$. Comme $|f|$ est supposée intégrable, on en déduit que $t \mapsto |f(t)g(x-t)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, et que

$$\int_{\infty}^{+\infty} |f(t)g(x-t)|\, dt \leq M \int_{\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt = \|f\|_1 \|g\|_\infty \ .$$

Par conséquent, l'intégrale définissant $f * g(x)$ est bien définie (puisqu'elle est absolument convergente), et l'inégalité triangulaire nous donne

$$|f * g(x)| \leq \int_{\infty}^{+\infty} |f(t)g(x-t)|\, dt \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty \ .$$

On vient de montrer que $f * g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, bornée, et que $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$.

(b) Fixons à nouveau $x \in \mathbb{R}$. Si $g \in L^2(\mathbb{R})$, alors le changement de variable (de classe C^1, bijectif) $u = x - t$ montre que $t \mapsto g(x-t)$ appartient également à $L^2(\mathbb{R})$ et que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x-t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2\, dt$. Par conséquent, $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est un produit de deux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$, et l'inégalité de Cauchy–Schwarz nous donne

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\, dt \right| \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x-t)|^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_2 \|g\|_2 \ .$$

On vient de montrer que $f * g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, bornée, et que $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_2 \|g\|_2$.

2. Fixons $x \in \mathbb{R}$. En utilisant à nouveau le changement de variables (de classe C^1, bijectif) $u = x - t$, on obtient que

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)g(u)\, du = g * f(x) \ .$$

3. Supposons f nulle en dehors de $[-A, A]$ et g nulle en dehors de $[-B, B]$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\, dt = \int_{-A}^{A} f(t)g(x-t)\, dt \ .$$

Pour que $g(x-t)$ prenne une valeur non nulle quand t varie entre $-A$ et A, il faut qu'un certain $x - t$ appartienne à $[-B, B]$, par conséquent x doit être compris entre $-A - B$ et $A + B$. On vient de montrer que $f * g$ est nulle en dehors de $[-(A+B), A+B]$.

De plus, comme $(x, t) =\mapsto f(t)g(x-t)$ est continue, le théorème de continuité des intégrales à paramètres (appliqué sur le segment $[-(A+B), A+B]$ à une fonction continue en les deux variables : on n'a pas besoin de chercher une fonction de dominatrion) nous permet de conclure que $f * g$ est continue ; on a fini de montrer que $f * g$ estune fonction continue à support compact.

Partie II.

1. h est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\ |x - y| \leq \delta \Rightarrow |h(x) - h(y)| \leq \varepsilon \ .$$

En posant $y = x - \alpha$ dans la formule précédente, on voit que h est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}\ |\alpha| \leq \delta \Rightarrow \|h - T_\alpha(h)\|_\infty \leq \varepsilon \ .$$

Ceci est équivalent au fait que $\|T_\alpha(h) - h\|_\infty$ tende vers 0 quand α tend vers 0.

2. On sait que $T_\alpha(f) \in L^2(\mathbb{R})$ et que $\|T_\alpha(f)\|_2 = \|f\|_2$ pour tout α (on a déjà utilisé ce fait dans la partie I). Par conséquent, $T_\alpha(f) - f \in L^2(\mathbb{R})$ (pour le vérifier, on pourrait utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz ; on utilise simplement le fait que $L^2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel). Enfin, on a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$T_\alpha(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f(x - \alpha - t)\, dt = T_\alpha(f) * g(x) \; .$$

On en déduit

$$\|T_\alpha(f * g) - f * g\|_\infty = \|T_\alpha(f) * g - f * g\|_\infty = \|(T_\alpha(f) - f) * g\|_\infty \leq \|T_\alpha(f) - f\|_2 \|g\|_2 \; .$$

3. (a) Supposons que f soit nulle en dehors de $[-A, A]$. Comme on veut étudier ce qui se passe quand α tend vers 0, on ne considère ci-dessous que des $\alpha \in [-1, 1]$. On a alors

$$\|T_\alpha(f) - f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x-\alpha) - f(x))^2\, dx = \int_{-A-1}^{A+1} (f(x-\alpha) - f(x))^2\, dx \; .$$

(La dernière égalité ci-dessus vient du fait que, pour tout x tel que $|x| \geq A+1$, $f(x)$ et $f(x-\alpha)$ sont tous deux nuls)

La fonction $(x, \alpha) \mapsto (f(x-\alpha) - f(x))^2$ est continue sur $[-A-1, A+1] \times [-1, 1]$, donc elle est bornée sur ce compact par une constante K. Toutes les hypothèses sont réunies pour que nous puissions appliquer de nouveau le théorème de continuité des intégrales à paramètres : la fonction $\alpha \mapsto \|T_\alpha(f) - f\|_2^2$ est continue sur $[-1, 1]$. En particulier, quand α tend vers 0 cette fonction tend vers $\|T_0(f) - f\|_2^2 = 0$. Donc $\|T_\alpha(f) - f\|_2$ tend vers 0 quand α tend vers 0.

   (b) Supposons f à support compact. On vient de voir que $\|T_\alpha(f) - f\|_2$ tend vers 0 quand α tend vers 0, par conséquent la majoration obtenue à la question 2 ci-dessus entraîne que $\|T_\alpha(f * g) - f * g\|_\infty$ tend aussi vers 0 quand α tend vers 0. Ceci montre que $f * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

   (c) On peut par exemple définir une suite (k_n) satisfaisant les conditions de l'énoncé en posant, pour $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$k_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, n] \\ 1 - (x - n) & \text{si } x \in [n, n+1] \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

En étendant cette fonction à $\mathbb{R}$ tout entier par parité (i.e. en posant $k_n(x) = k_n(-x)$ pour $x < 0$), on obtient une fonction continue, et il est immédiat que toutes les conditions demandées par l'énoncé sont satisfaires.

   (d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors f_n est un produit de deux fonctions continues, donc une fonction continue ; de plus f_n est nulle en dehors de $[-n, n]$, donc f_n est à support compact. Enfin, la définition de f_n nous donne

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{-n-1} |f(t)|^2\, dt + \int_{-n-1}^{-n} k_n(t)^2 |f(t)|^2\, dt + \int_{n}^{n+1} k_n(t)^2 |f(t)|^2\, dt + \int_{n+1}^{+\infty} |f(t)|^2\, dt \\ &\leq \int_{-\infty}^{-n} |f(t)|^2\, dt + \int_{n}^{+\infty} |f(t)|^2\, dt \; . \end{aligned}$$

Puisque $|f(t)|^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{-n} |f(t)|^2\, dt + \int_{n}^{+\infty} |f(t)|^2\, dt$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, ce qui prouve que $\|f_n - f\|_2^2$ tend vers 0, autrement dit que $\|f_n - f\|_2$ tend vers 0.

   (e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\|f_n * g - f * g\|_\infty = \|(f_n - f) * g\|_\infty \leq \|f_n - f\|_2 \|g\|_2 \; .$$

Ceci montre que $\|f_n * g - f * g\|_\infty$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, autrement dit que $f_n * g$ converge uniformément vers $f * g$ quand n tend vers $+\infty$; puisque chaque $f_n * g$ est une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $f * g$ est continue sur $\mathbb{R}$ (en fait, $f * g$ est même uniformément continue en tant que limite uniforme d'une suite de fonctions uniformément continues).

Partie III.

1. (a) Comme $h_n(t) \to 0$ quand t tend vers 1 et quand t tend vers -1, on vérifie que chaque h_n est continue sur $\mathbb{R}$. De plus h_n est à support compact donc elle est intégrable sur $\mathbb{R}$. La définition de h_n donne immédiatement, pour tout n :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t)\,dt = \frac{1}{\lambda_n}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n\,dt = 1 \ .$$

Reste à vérifier la dernière condition. A première vue, ce n'est pas évident, à cause de la division par λ_n, qui tend vers 0. On peut essayer de minorer λ_n (pour voir que ça ne tend pas trop vite vers 0) ; en utilisant le fait que $t^2 \leq t$ sur $[0,1]$ et que $(1-t^2)^n \geq 0$ sur $[-1,0]$ on obtient

$$\lambda_n = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^n\,dt \geq \int_{0}^{1}(1-t)^n\,dt = \left[\frac{-(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \ .$$

On en déduit que, pour tout $\varepsilon > 0$ (qu'on suppose aussi plus petit que 1 sinon on n'a rien à démontrer), on a

$$0 \leq \int_{\varepsilon}^{+\infty} h_n(t)\,dt = \int_{\varepsilon}^{1}\frac{(1-t^2)^n}{\lambda_n}\,dt \leq \int_{\varepsilon}^{1}(1-\varepsilon^2)^n(n+1)\,dt \leq (n+1)(1-\varepsilon^2)^n \ .$$

Puisque $0 \leq 1-\varepsilon^2 < 1$, on en déduit que $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{+\infty} h_n(t)\,dt$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, ce qu'on souhaitait démontrer. Comme h_n est paire, on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{-\varepsilon} h_n(t)\,dt = \int_{\varepsilon}^{+\infty} h_n(t)\,dt$ pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui montre que $\displaystyle\int_{-\infty}^{-\varepsilon} h_n(t)\,dt$ converge aussi vers 0.

(b) Comme h_n a un support contenu dans $[-1,1]$ et f a un support contenu dans $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, un calcul fait plus haut donne que $f * h_n$ a un support contenu dans $[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]$, autrement dit $f*h_n$ est nulle en dehors de cet intervalle.

Si maintenant $x \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, alors $f * h_n(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)h_n(x-t)\,dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)h_n(x-t)\,dt$.

Comme $x - t \in [-1,1]$ pour tout $t \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
f * h_n(x) &= \frac{1}{\lambda_n}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)(1-(x-t)^2)^n\,dt \\
&= \frac{1}{\lambda_n}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^{n-k}(x-t)^{2n-2k}\right)dt \\
&= \frac{1}{\lambda_n}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^{n-k}\sum_{j=0}^{2n-2k} C_{2n-2k}^j x^j(-t)^{2n-2k-j}\right)dt \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{2n-2k}\left(\frac{1}{\lambda_n}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)(-1)^{n-k-j}C_n^kC_{2n-2k}^j t^{2n-2k-j}\,dt\right)x^j \ .
\end{aligned}$$

Cette fonction est polynomiale, ce qu'on souhaitait démontrer.

2. (a) Fixons $\varepsilon > 0$, et $\delta > 0$. Alors on a

$$\left|\int_{-\infty}^{\delta} f(x-t)h_n(t)\,dt\right| \leq \|f\|_\infty \int_{-\infty}^{-\delta} h_n(t)\,dt \ .$$

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{-\delta} h_n(t)\,dt$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on en déduit qu'il existe N_0 tel que, pour tout $n \geq N_0$, on ait $\left|\displaystyle\int_{-\infty}^{\delta} f(x-t)h_n(t)\,dt\right| \leq \varepsilon$; le même raisonnement nous permet d'obtenir N_1 tel que pour tout $n \geq N_1$ on ait $\left|\displaystyle\int_{\delta}^{+\infty} f(x-t)h_n(t)\,dt\right| \leq \varepsilon$. Alors, $n_0 = \max(N_0, N_1)$ satisfait la condition réclamée par l'énoncé.

(b) Fixons $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Par continuité de f en x, il existe $\delta > 0$ (qu'on peut supposer ≤ 1) tel que $|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $y \in [x-\delta, x+\delta]$; fixons un tel δ. L'inégalité triangulaire nous donne

$$|f*h_n(x)-f(x)| \leq \left|\int_{-\infty}^{-\delta} f(x-t)h_n(t)\,dt\right| + \left|\int_{\delta}^{+\infty} f(x-t)h_n(t)\,dt\right| + \left|\int_{-\delta}^{\delta} f(x-t)\,h_n(t)\,dt - f(x)\right|$$

Pour $n \geq n_0$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
|f*h_n(x) - f(x)| &\leq 2\varepsilon + \left|\int_{-\delta}^{\delta} f(x-t)\,h_n(t)\,dt - f(x)\right| \\
&\leq 2\varepsilon + \left|\int_{-\delta}^{\delta} (f(x-t) - f(x))\; h_n(t)\,dt - f(x)\left(1 - \int_{-\delta}^{\delta} h_n(t)\,dt\right)\right| \\
&\leq 2\varepsilon + \left|\int_{-\delta}^{\delta} (f(x-t) - f(x))\; h_n(t)\,dt\right| + |f(x)|\left(1 - \int_{-\delta}^{\delta} h_n(t)\,dt\right).
\end{aligned}$$

Finalement, on arrive à

$$|f*h_n(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon + 2\delta\varepsilon + |f(x)|\left(1 - \int_{-\delta}^{\delta} h_n(t)\,dt\right) .$$

Puisque $\displaystyle\int_{-\delta}^{\delta} h_n(t)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on obtient finalement que, pour n suffisamment grand, on a $|f*h_n(x) - f(x)| \leq 5\varepsilon$. Donc la suite $(f*h_n(x))$ converge vers $f(x)$, autrement dit $f*h_n$ converge simplement vers f.

(c) Fixons de nouveau $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta \in]0,1[$ tel que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on ait $|x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Fixons un tel δ ; alors la même majoration que celle utilisée à la question précédente nous dit qu'il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on ait

$$|f*h_n(x) - f(x)| \leq 4\varepsilon + \|f\|_\infty \left(1 - \int_{-\delta}^{\delta} h_n(t)\,dt\right) .$$

(La seule différence avec la question précédente est que δ ne dépend pas de x puisque f est uniformément continue)

Par conséquent, on voit que, pour n suffisamment grand, $|f*h_n(x) - f_n(x)| \leq 5\varepsilon$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, autrement dit $f*h_n$ converge uniformément vers f.

3. Supposons d'abord que f soit une fonction continue sur $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$; alors f s'étend en une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à support contenu dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (et donc bornée). Dans ce cas, $(f*h_n)$ est une suite de fonctions polynomiales sur $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ qui converge uniformément vers f.
Le cas général s'en déduit par une translation et une dilatation : soit maintenant $I = [a,b]$ un segment quelconque, alors on commence par considérer la fonction f_1 définie sur $[0, \frac{1}{4}]$ par

$$f_1(x) = f(a + 4x(b-a)) .$$

On vient de voir que f_1 est limite d'une suite de fonctions polynomiales (P_n) sur $[0, \frac{1}{4}]$. Par conséquent, f est limite uniforme de la suite de fonctions polynomiales Q_n définies sur $[a, b]$ par la formule $Q_n(x) = P_n\left(\dfrac{(x-a)}{4(b-a)}\right)$.

4. Supposons qu'il existe une fonction $g \in C_b(\mathbb{R})$ telle que $f * g = f$ pour toute $f \in L^1(\mathbb{R})$. En particulier, on doit avoir $h_n * g = h_n$ pour tout n ; mais on a vu que $h_n * g$ converge simplement vers g quand n tend vers $+\infty$. Par conséquent g doit être la limite simple de la suite (h_n). En particulier, g doit être nulle sur $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ et à valeurs positives (puisque chaque h_n a ces propriétés). De plus, sur $[-1, \varepsilon] \cup [\varepsilon, 1]$ (avec $\varepsilon > 0$) on a par définition
$$h_n(x) \leq \frac{(1-\varepsilon^2)^n}{\lambda_n} \leq (n+1)(1-\varepsilon^2)^n$$
Donc (h_n) converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; par conséquent g doit être nulle sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Comme g est continue on en déduit que g est la fonction nulle, ce qui amène à une contradiction.

5. Si (P_n) est une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$, alors le critère de Cauchy uniforme nous dit qu'il existe n_0 tel que, pour tout $n, m \geq n_0$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $|P_n(x) - P_m(x)| \leq 1$. En particulier, $P_n - P_m$ est une fonction polynomiale bornée sur $\mathbb{R}$, ce qui n'est possible que si $P_n = P_m + c_{n,m}$, où $c_{n,m}$ est une constante. Par conséquent, à partir du rang n_0 on a $P_n = P_{n_0} + c_n$, et la suite (c_n) doit être de Cauchy, donc converger vers $c \in \mathbb{R}$. Alors la suite (P_n) converge vers le polynôme $P = P_{n_0} + c$. Par conséquent, si une fonction $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales, alors f est elle-même une fonction polynomiale. On voit donc que la conclusion du théorème de Stone-Weierstrass est fausse sur $\mathbb{R}$: une fonction continue sur $\mathbb{R}$ n'est en général pas limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.