Second écrit blanc d'analyse - Correction.

Problème 1.

Partie I.

1. En appliquant l'égalité de Parseval à f, on constate que $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = 0$. Comme $|f|^2$ est une fonction continue et à valeurs positives sur $[0,2\pi]$, ceci entraîne que f est nulle sur $[0,2\pi]$. Comme f est 2π-périodique, on en déduit que f est la fonction nulle.
   Le résultat n'est clairement pas vrai si f est seulement supposée continue par morceaux : considérons par exemple la fonction f qui vaut 1 en $2k\pi$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$, et 0 ailleurs. C'est une fonction continue par morceaux, 2π-périodique et ses coefficients de Fourier sont tous nuls alors que f n'est pas la fonction nulle.
2. On doit calculer, pour $n,m\in\mathbb{Z}$,
$$\int_0^{2\pi} e^{i(-nx+mx)}\,dx = \begin{cases} 2\pi & \text{si } n=m \\ \left[\dfrac{e^{i(m-n)x}}{m-n}\right]_0^{2\pi} = 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$
   On en déduit que les coefficients de Fourier de la fonction $f_m \colon x\mapsto e^{imx}$ sont donnés par
$$c_n(f_m) = \begin{cases} 1 & \text{si } n=m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$
3. (a) Les fonctions apparaissant dans la série de Fourier de f sont des fonctions continues ; une série de fonctions continues qui converge uniformément a une limite continue. Par conséquent, g est continue. Pour calculer les coefficients de Fourier de g, on écrit, pour $n\in\mathbb{Z}$:
$$c_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} c_m(f)e^{imx} + c_{-m}(f)e^{-imx}\right)e^{-inx}\,dx$$
   Comme la série de fonctions définissant g converge uniformément sur le segment $[0,2\pi]$, on peut échanger série et intégrale, et obtenir :
$$c_n(g) = \frac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\left(c_m(f)e^{i(m-n)x} + c_{-m(f)}e^{i(-n-m)x}\right)\,dx = c_n(f) .$$
   (La dernière égalité vient du calcul des coefficients de Fourier de $x\mapsto e^{imx}$ fait à la question 2).

   (b) On a que $g-f$ est une fonction continue, 2π-périodique, et dont tous les coefficients de Fourier sont nuls puisque $c_n(g-f) = c_n(g) - c_n(f)$. Par conséquent $g-f$ est la fonction nulle, autrement dit $g=f$.
4. (a) Soit $n\in\mathbb{Z}$. On a, en appliquant la formule d'intégration par parties (ce qui est possible puisque f est de classe C^1 et l'exponentielle est de classe C^∞) :
$$2\pi c_n(f') = \int_0^{2\pi} f'(x)e^{-inx}\,dx = \left[f(x)e^{-inx}\right]_0^{2\pi} + in\int_0^{2\pi} f(x)e^{inx}\,dx\ . = in\cdot 2\pi c_n(f) .$$
   (le terme entre crochets s'annule puisque f est 2π-périodique)
   On en déduit que $c_n(f') = inc_n(f)$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$.

(b) Soit x un réel et n un entier naturel non nul. On a

$$|u_n(x)| = |c_n(f)e^{inx} + c_{-n}(f)e^{-inx}| \leq |c_n(f)| + |c_{-n}(f)| = \frac{1}{n}|c_n(f')| + \frac{1}{n}|c_{-n}(f')| \ .$$

Remarquons que, pour tout $a, b \geq 0$ on a $ab \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$ (c'est une conséquence immédiate d'une des identités remarquables). Par conséquent, l'inégalité obtenue ci-dessus nous donne :

$$|u_n(x)| \leq \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2}|c_n(f')|^2 + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2}|c_{-n}(f')|^2 = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2}\left(|c_n(f')|^2 + c_{-n}(f')|^2\right) \ .$$

(c) Par l'égalité de Parseval appliquée à f', on sait que $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(|c_n(f)'|^2 + |c_{-n}(f')|^2)$ converge. Par conséquent, puisque $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ converge aussi, l'inégalité obtenue à la question précédente montre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sup\{|u_n(x)| \colon x \in \mathbb{R}\}$ converge, autrement dit $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ converge normalement. Donc la série de Fourier associée à f (qui vaut $c_0(f) + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$)) converge normalement, et on a montré plus haut que dans ce cas la limite doit être f (ici on utilise que la convergence normale entraîne la convergence uniforme). Donc $c_0(f) + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ converge normalement vers f.

(d) On a montré que, si f est de classe C^1 et 2π-périodique, alors la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$ (ou, ce qui est équivalent ici puisque les fonctions sont périodiques, sur $[0, 2\pi]$).

Partie II.

1. (a) On a vu que $c_n(f') = inc_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$; ici notre hypothèse sur f donne $c_0(f) = 0$, et on a aussi $c_0(f') = 0$. La formule de Parseval appliquée à f, f', et la relation entre les coefficients de Fourier de f et ceux de f', donnent :

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\, dt = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|c_n(f)|^2 \ .$$

Puisque $n^2|c_n(f)|^2 \geq c_n(f)|^2$ pour tout $n \geq 1$, et que ces deux quantités sont égales à 0 quand $n = 0$, on en déduit l'inégalité de Wirtinger.

(b) Le cas d'égalité de l'inégalité précédente est le cas où $|c_n(f)|^2 = n^2|c_n(f)|^2$ pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$. Par conséquent, l'inégalité précédente est une égalité si, et seulement si, $c_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 2$. Puisque f est égale à la somme de sa série de Fourier et $c_0(f) = 0$, on doit alors avoir $f(x) = c_1(f)e^{ix} + c_{-1}(f)e^{-ix}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Remarquons que, si l'on accepte le fait que la série de Fourier d'une fonction continue et C^1 par morceaux converge normalement vers f, alors en fait le raisonnement précédent nous permet de démontrer l'inégalité de Wirtinger dans le cas des fonctions continues et C^1 par morceaux.

2. Notons que l'énoncé aurait dû explicitement dire que γ était continue (un « paramétrage » d'une courbe est toujours une fonction continue, mais cela va mieux en le disant).

(a) Comme $|\gamma'(t)|$ est constant, la définition de l nous donne que cette constante est égale à $\dfrac{l}{2\pi}$. On a alors

$$2\pi \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|^2\, dt = 2\pi \int_0^{2\pi} \frac{l^2}{4\pi^2}\, dt = l^2 \ .$$

(b) L'égalité précédente et la définition de A donnent immédiatement, par linéarité de l'intégrale :

$$l^2 - 4\pi A = 2\pi \int_0^{2\pi} \left(|\gamma'(t)|^2 - 2x(t)y'(t)\right) \, dt = 2\pi \int_0^{2\pi} \left((x'(t))^2 + (y'(t))^2 - 2x(t)y'(t)\right) \, dt \; .$$

(c) Comme x est 2π-périodique, continue et de classe C^1 par morceaux, et $\int_0^{2\pi} x(t)\, dt = 0$, on peut lui appliquer l'inégalité de Wirtinger (c'est là que notre remarque sur le fait que l'inégalité est aussi vraie pour les fonctions continues et C^1 par morceaux est utile !), et on obtient à partir de l'inégalité précédente que

$$l^2 - 4\pi A \geq 2\pi \int_0^{2\pi} \left((x(t))^2 + (y'(t))^2 - 2x(t)y'(t)\right) \, dt = 2\pi \int_0^{2\pi} (x(t) - y'(t))^2 \, dt \; .$$

(d) Par conséquent, $l^2 - 4\pi A$ est supérieure à l'intégrale d'une fonction positive : c'est donc une quantité positive. Pour que $l^2 - 4\pi A$ soit nul, il est nécessaire que l'on ait égalité dans l'inégalité de Wirtinger appliquée à x, et que l'intégrale $\int_0^{2\pi} (x(t) - y'(t))^2 \, dt$ soit nulle. Le cas d'égalité de l'inégalité de Wirtinger nous donne alors que $x(t) = c_1(x)e^{ix} + c_{-1}xe^{-ix}$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$; comme x est à valeurs réelles, $c_1(x)$ et $c_{-1}(x)$ sont conjugués, donc on a $x(t) = 2Re(c_1(x))\cos(t) + 2Im(c_1(x))\sin(t)$. On a donc bien $x(t) = \alpha\cos(t) + \beta\sin(t)$ pour deux constantes réelles α, β. De plus, pour que l'intégrale soit nulle il faut que $x(t) = y'(t)$ sauf éventuellement sur l'ensemble fini de discontinuités de y'.

(e) En chaque discontinuité éventuelle de y', on voit que la limite à droite et la limite à gauche de y' doivent être égales (puisque y' coïncide, en dehors de ses discontinuités éventuelles, avec x qui est continue), donc y' est continue et égale à x. On en déduit qu'il existe y_0 tel que $y(t) = y_0 + \alpha\sin(t) - \beta\cos(t)$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$. On a donc finalement, dans le cas où $l^2 = 4\pi A$, que $(x(t), y(t))$ parcourt un cercle de centre $(0, y_0)$ et de rayon $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$: dans le cas où $l^2 = 4\pi A$, Γ est un cercle.

(f) Dans le cas où Γ est un cercle de rayon R, on a $l^2 = (2\pi R)^2 = 4\pi^2 R^2$ et $A = \pi R^2$, par conséquent on a bien $l^2 = 4\pi A$ dans ce cas.

(g) Soit Γ une courbe simple, fermée, lisse, de longueur 2π. Alors l'inégalité obtenue précédemment montre que l'aire du domaine délimité par Γ est nécessairement inférieure à 1 (qui est l'aire d'un cercle de rayon 1, i.e. de périmètre 2π), et que l'aire ne peut être égale à 1 que si Γ est un cercle de rayon 1 : un cercle de rayon 1 est l'unique courbe simple, fermée, lisse qui délimite un domaine d'aire 1.

Problème 2.

Partie I.

1. (a) Fixons $x \in \mathbb{R}$. On a $|f(x,t)| \leq g(t)$ pour tout $t \in]a, +\infty[$, et $\int_a^{+\infty} g(t)\, dt$ converge par hypothèse. Par comparaison, $\int_a^{+\infty} |f(x,t)|\, dt$ converge également, par conséquent l'intégrale définissant $F(x)$ converge (on a même montré qu'elle converge absolument).

(b) Fixons $t \in]a, +\infty[$. Par continuité de $x \mapsto h(x,t)$, on a $\lim_{n\to+\infty} h(x_n, t) = h(x,t)$ puisque (x_n) converge vers x. Par conséquent, pour tout t fixé on a $\lim_{n\to+\infty} h_n(t) = f(x,t)$, autrement dit (h_n) converge simplement vers $t \mapsto f(x,t)$.
De plus, on a $|h_n(t)| = |f(x_n, t)| \leq g(x)$ pour tout n et tout $t \in]a, +\infty[$.

(c) Soit $x \in I$, et (x_n) une suite d'éléments de I qui converge vers x. En appliquant le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions (h_n) définie à la question précédente, on obtient que $\lim_{n\to+\infty} \int_a^{+\infty} h_n(t)\, dt = \int_a^{+\infty} f(x,t)\, dt$. Autrement dit, pour tout $x \in I$ et toute suite (x_n)

d'élements de I qui converge vers x, on a $\lim_{n\to+\infty} F(x_n) = F(x)$. On vient de prouver que F est continue sur I.

2. (a) Les fonctions $(x,t) \mapsto \sin(xt)$ et $(x,t) \mapsto t$ sont toutes deux continues ; leur quotient est donc aussi une fonction continue sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ (notons que sur ce domaine le dénominateur ne s'annule pas).

   (b) Fixons M strictement positif. On a, en utilisant une intégration par parties :

$$\int_1^M \frac{\sin(u)}{u}\,du = \left[-\frac{cos(u)}{u}\right]_1^M + \int_1^M \frac{\cos(u)}{u^2}\ ,du$$

   Puisque $\left|\frac{\cos(u)}{u^2}\right| \leq \frac{1}{u^2}$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u^2}\,du$ converge (comparaison à une intégrale de Riemann) : quand M tend vers $+\infty$, $\left[-\frac{cos(u)}{u}\right]_1^M = \cos(1) - \frac{cos(M)}{M}$ tend vers $\cos(1)$. On vient de montrer que $\int_1^M \frac{\sin(u)}{u}\,du$ converge quand M tend vers $+\infty$, donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,du$ est convergente.

   En 0, $\frac{\sin(u)}{u}$ tend vers 1, donc l'intégrale sur $]0,1]$ est en fait celle d'une fonction continue sur $[0,1]$, et $\int_0^1 \frac{\sin(u)}{u}\,du$ est donc convergente. On a finalement montré que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,du$ converge, et on admet [1] que sa limite est $\frac{\pi}{2}$.

   Remarque : pour traiter les deux bornes simultanément, on aurait pu intégrer par parties entre $-m$ et M, et faire tendre m vers 0 et M vers $+\infty$; mais alors, pour avoir convergence des deux termes apparaissant dans l'intégration par parties, il aurait fallu être un peu plus rusé et choisir $1-\cos$ comme primitive de sin.

   (c) Commençons par remarquer que $G(x) = 0$. Si $x > 0$, utilisons le changement de variables (de classe C^1, bijectif) $u = xt$ pour obtenir que

$$G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,du = \frac{\pi}{2}\ .$$

   Si $x < 0$, le même changement de variables nous donne (attention aux bornes !)

$$G(x) = \int_0^{-\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,du = -\int_{-\infty}^{0} \frac{\sin(u)}{u}\,du = -\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,du = -\frac{\pi}{2}\ .$$

   (l'avant-dernière égalité vient du fait que la fonction $u \mapsto \frac{\sin(u)}{u}$ est paire)

   Cette fonction n'est pas continue sur $\mathbb{R}$; cela ne contredit pas le résultat de la question précédente, puisqu'une des hypothèses n'est pas vérifiée, à savoir l'existence d'une fonction h positive et intégrable telle que $\left|\frac{\sin(xt)}{t}\right| \leq h(t)$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[$.

3. (a) Fixons $t \in]a,+\infty[$ et $x \in I$, $x \neq x_0$. La fonction $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable sur I, on peut donc lui appliquer l'égalité des accroissements finis et obtenir qu'il existe c appartenant à l'intervalle ouvert d'extrémités x_0 et x et tel que

$$f(x,t) - f(x_0,t) = (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(c,t)\ .$$

   On en déduit que $|f(x_0,t) - f(x,t)| \leq |x-x_0|g(t)$ pour tout $x \in I$ différent de x_0, et cete inégalité est bien sûr vraie quand $x = x_0$.

1. Contrairement à ce que demandait l'énoncé initial ...

(b) Puisque g est intégrable et $F(x_0)$ converge, l'inégalité de la question précédente montre que, pour tout $x \in I$, $F(x)-F(x_0)$ est une intégrale absolument convergente. L'intégrale définissant $F(x)$ est donc une somme de deux intégrales convergentes, par conséquent elle est convergente aussi.

(c) Il n'y avait pas de question !

(d) C'est une conséquence immédiate de l'inégalité obtenue en (a).

(e) Fixons $t \in]a, +\infty[$. Par définition d'une dérivée partielle,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(u_n,t)-f(x,t)}{u_n-x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \ .$$

C'est ce qu'on souhaitait démontrer.

(f) Fixons $x \in I$, et une suite (u_n) qui converge vers x. En appliquant le théorème de convergence dominée (dont on vient de vérifier les hypothèses dans les questions précédentes), on voit que $\dfrac{F(u_n)-F(x)}{u_n-x} = \displaystyle\int_a^{+\infty} h_n(t)\,dt$ converge vers $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$. Ceci étant vrai pour toute suite (u_n) qui converge vers x (en prenant des valeurs différentes de x), on vient de prouver que

$$\lim_{y\to x} \frac{F(y)-F(x)}{y-x} = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \ .$$

Ceci montre que F est dérivable sur I, et que pour tout $x \in I$ on a

$$F'(x) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt \ .$$

Partie II.

1. Posons $g(t) = \left(\dfrac{\sin(t)}{t}\right)^2$. Alors g est continue sur $]0, +\infty[$, à valeurs positives. De plus, g se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0) = 1$; et comme on a $0 \leq g(t) \leq \dfrac{1}{t^2}$ on peut conclure par comparaison à une intégrale de Riemann que $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)\,dt$ converge. Par conséquent, $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ converge.
2. La fonction $(x,t) \mapsto f(x,t)\dfrac{\sin(t)}{t}e^{-xt}$ est continue sur $[0, +\infty[\times]0, +\infty[$, et on a $|f(x,t)| \leq g(t)$; on peut donc appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètres établi lors de la première partie et conclure que F est bien définie et continue sur $[0, +\infty[$.
3. Fixons $a > 0$. Pour tout $x \geq 0$ et tout $t > 0$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{(\sin(t))^2}{t}e^{-xt} \ .$$

C'est une fonction continue de deux variables. De plus, en utilisant le fait que $|\sin(t)| \leq 1$ et $|\sin(t)| \leq |t|$ pour tout t (la seconde inégalité est une conséquence immédiate de la première et de l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction sin), on a que, pour tout $(x,t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[$, $|f(x,t)| \leq e^{-xt}$. Par conséquent, sur $]a, +\infty[\times]0, +\infty[$, on a $|f(x,t)| \leq e^{-at}$; cette fonction est intégrable sur $]0, +\infty[$, et on peut donc appliquer le théorème sur les dérivées d'intégrales à paramètres obtenu dans la partie précédente, et conclure que F est dérivable sur $]a, +\infty[$ et qu'on a

$$\forall x > a \ F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(\sin(t))^2}{t}e^{-xt} \ .$$

En utilisant un raisonnement similaire, on montre que F' est dérivable sur $]a, +\infty[$, de dérivée

$$F''(x) = \int_0^{+\infty} (\sin(t))^2 e^{-xt}\,dt \ .$$

La raisonnement précédent étant valable pour tout $a > 0$, on en déduit que F est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$, et que la formule ci-dessous donnant la valeur de $F''(x)$ est valable sur tout cet intervalle.

4. Le plus simple ici est sans doute de passer par les nombres complexes, ce qui est souvent un bon réflexe quand on calcule des intégrales trigonométriques. On commence par écrire que pour tout x on a $\sin(x) = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$, ce qui permet de retrouver (en élevant au carré) la formule $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$. Ceci nous donne
$$F''(x) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \cos(2t)e^{-xt}\,dt\ .$$
C'est maintenant que les nombres complexes sont vraiment utiles : on a $\cos(2t) = Re(e^{2it})$, ce qui nous donne
$$\int_0^{+\infty} \cos(2t)e^{-xt}\,dt = Re\left(\int_0^{+\infty} e^{(2i-x)t}\,dt\right) = Re\left(\frac{-1}{2i-x}\right) = \frac{x}{x^2+4}\ .$$
Finalement, $F''(x) = \dfrac{1}{2x} - \dfrac{x}{2(x^2+4)}$.
(Si on a peur des nombres complexes, on peut aussi s'en sortir en faisant deux intégrations par parties, mais c'est plus long...)
5. Soit (x_n) une suite tendant vers $+\infty$. La suite de fonctions $t \mapsto f(x_n,t)$ converge simplement vers 0, et $|f(x_n,t)| \leq \left(\dfrac{\sin(t)}{t}\right)^2$, qui est intégrable ; le théorème de convergence dominée nous permet de conclure que
$$\lim_{n\to+\infty} F(x_n) = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f(x_n,t)\,dt = 0\ .$$
Ceci étant vrai pour toute suite (x_n) tendant vers $+\infty$, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.
Fixons de nouveau une suite (x_n) tendant vers $+\infty$. Pour appliquer le même raisonnement à F', il nous faut une fonction intégrable majorant la suite $\left(\dfrac{\sin(t)^2}{t}e^{-x_nt}\right)$ indépendamment de n ; sans perte de généralité, on peut supposer que la suite (x_n) prend ses valeurs dans $[1,+\infty[$, et on a alors $\left|\dfrac{\sin(t)^2}{t}e^{-x_nt}\right| \leq e^{-t}$ pour tout n. Comme $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable, le théorème de convergence dominée nous permet de conclure que $F'(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
6. La formule obtenue pour F nous donne qu'il existe une constante A telle que
$$\forall x > 0\ F'(x) = A + \frac{1}{2}\ln(x) - \frac{1}{4}\ln(x^2+4) = A + \frac{1}{4}\ln(\frac{x^2}{x^2+4})\ .$$
Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(\dfrac{x^2}{x^2+4}) = 0$, pour que $F'(x)$ tende vers 0 en $+\infty$ on doit avoir $A = 0$; on obtient
$$\forall x > 0\ F'(x) = \frac{1}{2}\ln(x) - \frac{1}{4}\ln(x^2+4)\ .$$
7. Il nous reste à calculer une primitive de F'... Une primitive de ln est $x \mapsto x(\ln(x)-1)$, ce qu'on peut retrouver à l'aide d'une intégration par parties. De même, une intégration par parties nous donne, pour tout $x > 0$:
$$\int_1^x \ln(t^2+4)\,dt = \left[t\ln(t^2+4)\right]_1^x - \int_1^x \frac{2t^2}{t^2+4}\,dt\ .$$
Il nous faut maintenant calculer une primitive de $x \mapsto \dfrac{2x^2}{x^2+4} = 2 - \dfrac{8}{x^2+4}$. En reconnaissant la dérivée d'une composée de arctan, on obtient qu'une primitive de cette fonction est $x \mapsto 2x - 4\arctan(\frac{x}{2})$. Finalement, on obtient que F est de la forme
$$F(x) = \frac{1}{2}x(\ln(x)-1) - \frac{1}{4}x\ln(x^2+4) + \frac{x}{2} - \arctan(\frac{x}{2}) + B = \frac{1}{4}x\ln(\frac{x^2}{x^2+4}) - \arctan(\frac{x}{2}) + B\ ,$$

où B est une constante. En $+\infty$, on a

$$\ln\left(\frac{x^2}{x^2+4}\right) = \ln\left(\frac{1}{1+\frac{4}{x^2}}\right) = \ln(1-\frac{4}{x^2}) + o(\frac{1}{x^2}) \sim_{+\infty} -\frac{1}{4x^2} \ .$$

En utilisant le fait que la limite en $+\infty$ de $\arctan\frac{x}{2}$ est $\frac{\pi}{2}$ et que F tend vers 0 en $+\infty$, on obtient que $B = \frac{\pi}{2}$.

8. La formule qu'on vient d'obtenir pour F nous donne que $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = \frac{\pi}{2}$. En effet, $x\ln(\frac{x^2}{x^2+4}) = 2x\ln(x) - x\ln(x^2+4)$, qui tend vers 0 quand x tend vers 0 ; et $\arctan(0)=0$. Comme on a montré que F était continue sur $[0,+\infty[$, ceci nous permet (enfin !) de conclure que $F(0) = \frac{\pi}{2}$, et donc que

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2} \ .$$

Problème 3.

Partie I.

1. (a) Soit $x\in\mathbb{R}$, et $M = \|g\|_\infty$. Par définition, on a $|g(y)| \le M$ pour tout $y\in\mathbb{R}$, ce dont on déduit que pour tout $t\in\mathbb{R}$ on a $|f(t)g(x-t)| \le Mf(t)$. Comme $|f|$ est supposée intégrable, on en déduit que $t\mapsto |f(t)g(x-t)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, et que

$$\int_\infty^{+\infty} |f(t)g(x-t)|\,dt \le M\int_\infty^{+\infty}|f(t)|\,dt = \|f\|_1\|g\|_\infty \ .$$

Par conséquent, l'intégrale définissant $f*g(x)$ est bien définie (puisqu'elle est absolument convergente), et l'inégalité triangulaire nous donne

$$|f*g(x)| \le \int_\infty^{+\infty}|f(t)g(x-t)|\,dt \le \|f\|_1\|g\|_\infty \ .$$

On vient de montrer que $f*g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, bornée, et que $\|f*g\|_\infty \le \|f\|_1\|g\|_\infty$.

(b) Fixons à nouveau $x\in\mathbb{R}$. Si $g\in L^2(\mathbb{R})$, alors le changement de variable (de classe C^1, bijectif) $u = x-t$ montre que $t\mapsto g(x-t)$ appartient également à $L^2(\mathbb{R})$ et que $\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x-t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty}|g(t)|^2\,dt$. Par conséquent, $t\mapsto f(t)g(x-t)$ est un produit de deux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$, et l'inégalité de Cauchy–Schwarz nous donne

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,dt\right| \le \left(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x-t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_2\|g\|_2 \ .$$

On vient de montrer que $f*g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, bornée, et que $\|f*g\|_\infty \le \|f\|_2\|g\|_2$.

2. Fixons $x\in\mathbb{R}$. En utilisant à nouveau le changement de variables (de classe C^1, bijectif) $u = x-t$, on obtient que

$$f*g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)g(u)\,du = g*f(x) \ .$$

3. Supposons f nulle en dehors de $[-A,A]$ et g nulle en dehors de $[-B,B]$. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a

$$f*g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,dt = \int_{-A}^{A} f(t)g(x-t)\,dt \ .$$

Pour que $g(x-t)$ prenne une valeur non nulle quand t varie entre $-A$ et A, il faut qu'un certain $x-t$ appartienne à $[-B, B]$, par conséquent x doit être compris entre $-A-B$ et $A+B$. On vient de montrer que $f * g$ est nulle en dehors de $[-(A+B), A+B]$, autrement dit $f * g$ est à support compact.

Partie II.

1. h est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\ |x-y| \leq \delta \Rightarrow |h(x) - h(y)| \leq \varepsilon\ .$$

En posant $y = x - \alpha$ dans la formule précédente, on voit que h est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}\ |\alpha| \leq \delta \Rightarrow \|h - T_\alpha(h)\|_\infty \leq \varepsilon\ .$$

Ceci est équivalent au fait que $\|T_\alpha(h) - h\|_\infty$ tende vers 0 quand α tend vers 0.

2. On sait que $T_\alpha(f) \in L^2(\mathbb{R})$ et que $\|T_\alpha(f)\|_2 = \|f\|_2$ pour tout α (on a déjà utilisé ce fait dans la partie I). Par conséquent, $T_\alpha(f) - f \in L^2(\mathbb{R})$ (pour le vérifier, on pourrait utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz ; le fait que $L^2(\mathbb{R}]$ est un espace vectoriel est au programme officiel des écrits). Enfin, on a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$T_\alpha(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f(x - \alpha - t)\, dt = T_\alpha(f) * g(x)\ .$$

On en déduit

$$\|T_\alpha(f * g) - f * g\|_\infty = \|T_\alpha(f) * g - f * g\|_\infty = \|(T_\alpha(f) - f) * g\|_\infty \leq \|T_\alpha(f) - f\|_2 \|g\|_2\ .$$

3. (a) Supposons que f soit nulle en dehors de $[-A, A]$. Comme on veut étudier ce qui se passe quand α tend vers 0, on ne considère ci-dessous que des $\alpha \in [-1, 1]$. On a alors

$$\|T_\alpha(f) - f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x-\alpha) - f(x))^2\, dx = \int_{-A-1}^{A+1} (f(x-\alpha) - f(x))^2\, dx\ .$$

(La dernière égalité ci-dessus vient du fait que, pour tout x tel que $|x| \geq A+1$, $f(x)$ et $f(x-\alpha)$ sont tous deux nuls)

La fonction $(x, \alpha) \mapsto (f(x-\alpha) - f(x))^2$ est continue sur $[-A-1, A+1] \times [-1, 1]$, donc elle est bornée sur ce compact par une constante K. Toutes les hypothèses sont réunies pour que nous puissions appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètres démontré dans le Problème 2 : la fonction $\alpha \mapsto \|T_\alpha(f) - f\|_2^2$ est continue sur $[-1, 1]$. En particulier, quand α tend vers 0 cette fonction tend vers $\|T_0(f) - f\|_2^2 = 0$. Donc $\|T_\alpha(f) - \|_2$ tend vers 0 quand α tend vers 0.

(b) Supposons f à support compact. On vient de voir que $\|T_\alpha(f) - f\|_2$ tend vers 0 quand α tend vers 0, par conséquent la majoration obtenue à la question 2 ci-dessus entraîne que $\|T_\alpha(f * g) - f * g\|_\infty$ tend aussi vers 0 quand α tend vers 0. Ceci montre que $f * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

(c) On peut par exemple définir une suite (k_n) satisfaisant les conditions de l'énoncé en posant, pour $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$k_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, n] \\ 1 - (x - n) & \text{si } x \in [n, n+1] \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

En étendant cette fonction à $\mathbb{R}$ tout entier par parité (i.e. en posant $k_n(x) = k_n(-x)$ pour $x < 0$), on obtient une fonction continue, et il est immédiat que toutes les conditions demandées par l'énoncé sont satisfaires.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors f_n est un produit de deux fonctions continues, donc une fonction continue ; de plus f_n est nulle en dehors de $[-n, n]$, donc f_n est à support compact. Enfin, la définition de f_n nous donne

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{-n-1} |f(t)|^2\,dt + \int_{-n-1}^{-n} k_n(t)^2|f(t)|^2\,dt + \int_n^{n+1} k_n(t)^2|f(t)|^2\,dt + \int_{n+1}^{+\infty} |f(t)|^2\,dt \\ &\leq \int_{-\infty}^{-n} |f(t)|^2\,dt + \int_n^{+\infty} |f(t)|^2\,dt\ . \end{aligned}$$

Puisque $|f(t)|^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{-n} |f(t)|^2\,dt + \int_n^{+\infty} |f(t)|^2\,dt$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, ce qui prouve que $\|f_n - f\|_2^2$ tend vers 0, autrement dit que $\|f_n - f\|_2$ tend vers 0.

(e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\|f_n * g - f * g\|_\infty = \|(f_n - f) * g\|_\infty \leq \|f_n - f\|_2 \|g\|_2\ .$$

Ceci montre que $\|f_n * g - f * g\|_\infty$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, autrement dit que $f_n * g$ converge uniformément vers $f * g$ quand n tend vers $+\infty$; puisque chaque $f_n * g$ est une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $f * g$ est continue sur $\mathbb{R}$ (en fait, $f * g$ est même uniformément continue en tant que limite uniforme de fonctions uniformément continues).

Partie III.

1. (a) Comme $h_n(t) \to 0$ quand t tend vers 1 et quand t tend vers -1, on vérifie que chaque h_n est continue sur $\mathbb{R}$. De plus h_n est à support compact donc elle est intégrable sur $\mathbb{R}$. La définition de h_n donne immédiatement, pour tout n :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t)\,dt = \frac{1}{\lambda_n} \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^n\,dt = 1\ .$$

Reste à vérifier la dernière condition. A première vue, ce n'est pas évident, à cause de la division par λ_n, qui tend vers 0. On peut essayer de minorer λ_n (pour voir que ça ne tend pas trop vite vers 0) ; en utilisant le fait que $t^2 \leq t$ sur $[0, 1]$ et que $(1 - t^2)^n \geq 0$ sur $[-1, 0]$ on obtient

$$\lambda_n = \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^n\,dt \geq \int_0^1 (1 - t)^n\,dt = \left[\frac{-(1 - t)^{n+1}}{n + 1}\right]_0^1 = \frac{1}{n + 1}\ .$$

On en déduit que, pour tout $\varepsilon > 0$ (qu'on suppose aussi plus petit que 1 sinon on n'a rien à démontrer), on a

$$0 \leq \int_\varepsilon^{+\infty} h_n(t)\,dt = \int_\varepsilon^1 \frac{(1 - t^2)^n}{\lambda_n}\,dt \leq \int_\varepsilon^1 \frac{(1 - \varepsilon^2)^n}{n + 1}\,dt \leq \frac{(1 - \varepsilon^2)^n}{n + 1}\ .$$

Puisque $0 \leq 1 - \varepsilon^2 < 1$, on en déduit que $\int_\varepsilon^{+\infty} h_n(t)\,dt$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, ce qu'on souhaitait démontrer. Comme h_n est paire, on a $\int_{-\infty}^{-\varepsilon} h_n(t)\,dt = \int_\varepsilon^{+\infty} h_n(t)\,dt$ pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui montre que $\int_{-\infty}^{-\varepsilon} h_n(t)\,dt$ converge aussi vers 0.

(b) Comme h_n a un support contenu dans $[-1, 1]$ et f a un support contenu dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, un calcul fait plus haut donne que $f * h_n$ a un support contenu dans $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$, autrement dit $f * h_n$ est nulle en dehors de cet intervalle.

Si maintenant $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, alors $f * h_n(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) h_n(x - t)\,dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) h_n(x - t)\,dt$.

Comme $x-t\in[-1,1]$ pour tout $t\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
f*h_n(x) &= \frac{1}{\lambda_n}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)(1-(x-t)^2)^n\,dt\\
&= \frac{1}{\lambda_n}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^{n-k}(x-t)^{2n-2k}\right)\,dt\\
&= \frac{1}{\lambda_n}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^{n-k}\sum_{j=0}^{2n-2k} C_{2n-2k}^j x^j(-t)^{2n-2k-j}\right)\,dt\\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{2n-2k}\left(\frac{1}{\lambda_n}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)(-1)^{n-k-j}C_n^kC_{2n-2k}^j t^{2n-2k-j}\,dt\right)x^j\ .
\end{aligned}$$

Cette fonction est polynomiale, ce qu'on souhaitait démontrer.

2. (a) Fixons $\varepsilon>0$, et $\delta>0$. Alors on a

$$\left|\int_{-\infty}^{\delta} f(x-t)h_n(t)\,dt\right|\leq\|f\|_\infty\int_{-\infty}^{-\delta} h_n(t)\,dt\ .$$

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{-\delta} h_n(t)\,dt$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on en déduit qu'il existe N_0 tel que, pour tout $n\geq N_0$, on ait $\displaystyle\left|\int_{-\infty}^{\delta} f(x-t)h_n(t)\,dt\right|\leq\varepsilon$; le même raisonnement nous permet d'obtenir N_1 tel que pour tout $n\geq N_1$ on ait $\displaystyle\left|\int_{0}^{+\infty} f(x-t)h_n(t)\,dt\right|\leq\varepsilon$. Alors, $n_0=\max(N_0,N_1)$ satisfait la condition réclamée par l'énoncé.

(b) Fixons $x\in\mathbb{R}$ et $\varepsilon>0$. Par continuité de f en x, il existe $\delta>0$ (qu'on peut supposer ≤ 1) tel que $|f(y)-f(x)|\leq\varepsilon$ pour tout $y\in[x-\delta,x+\delta]$; fixons un tel δ. L'inégalité triangulaire nous donne

$$|f*h_n(x)-f(x)|\leq\left|\int_{-\infty}^{-\delta} f(x-t)h_n(t)\,dt\right|+\left|\int_{-\delta}^{+\infty} f(x-t)h_n(t)\,dt\right|+\left|\int_{-\delta}^{\delta} f(x-t)\,h_n(t)\,dt-f(x)\right|$$

Pour $n\geq n_0$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
|f*h_n(x)-f(x)| &\leq 2\varepsilon+\left|\int_{-\delta}^{\delta} f(x-t)\,h_n(t)\,dt-f(x)\right|\\
&\leq 2\varepsilon+\left|\int_{-\delta}^{\delta}(f(x-t)-f(x))\ h_n(t)\,dt-f(x)\left(1-\int_{-\delta}^{\delta}h_n(t)\,dt\right)\right|\\
&\leq 2\varepsilon+\left|\int_{-\delta}^{\delta}(f(x-t)-f(x))\ h_n(t)\,dt\right|+|f(x)|\left(1-\int_{-\delta}^{\delta}h_n(t)\,dt\right).
\end{aligned}$$

Finalement, on arrive à

$$|f*h_n(x)-f(x)|\leq 2\varepsilon+2\delta\varepsilon+|f(x)|\left(1-\int_{-\delta}^{\delta}h_n(t)\,dt\right)\ .$$

Puisque $\displaystyle\int_{-\delta}^{\delta} h_n(t)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on obtient finalement que, pour n suffisamment grand, on a $|f*h_n(x)-f(x)|\leq 5\varepsilon$. Donc la suite $(f*h_n(x))$ converge vers $f(x)$, autrement dit $f*h_n$ converge simplement vers f.

(c) Fixons de nouveau $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta \in]0,1[$ tel que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on ait $|x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$. Fixons un tel δ ; alors la même majoration que celle utilisée à la question précédente nous dit qu'il exite n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on ait

$$|f * h_n(x) - f(x)| \leq 4\varepsilon + \|f\|_\infty \left(1 - \int_{-\delta}^{\delta} h_n(t)\,dt\right) .$$

(La seule différence avec la question précédente est que δ ne dépend pas de x puisque f est uniformément continue)

Par conséquent, on voit que, pour n suffisamment grand, $|f * h_n(x) - f_n(x)| \leq 5\varepsilon$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, autrement dit $f * h_n$ converge uniformément vers f.

3. Supposons d'abord que f soit une fonction continue sur $[-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}]$; alors f s'étend en une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à support contenu dans $[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}]$ (et donc bornée). Dans ce cas, $(f * h_n)$ est une suite de fonctions polynomiales sur $[-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}]$ qui converge uniformément vers f.

   Le cas général s'en déduit par une translation et une dilatation : soit maintenant $I = [a,b]$ un segment quelconque, alors on commence par considérer la fonction f_1 définie sur $[0, \frac{1}{4}]$ par

$$f_1(x) = f(a + 4x(b-a)) .$$

   On vient de voir que f_1 est limite d'une suite de fonctions polynomiales (P_n) sur $[0, \frac{1}{4}]$. Par conséquent, f est limite uniforme de la suite de fonctions polynomiales Q_n définies sur $[a,b]$ par la formule $Q_n(x) = P_n\left(\dfrac{(x-a)}{4(b-a)}\right)$.

4. Si (P_n) est une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$, alors le critère de Cauchy uniforme nous dit qu'il existe n_0 tel que, pour tout $n, m \geq n_0$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $|P_n(x) - P_m(x)| \leq 1$. En particulier, $P_n - P_m$ est une fonction polynomiale bornée sur $\mathbb{R}$, ce qui n'est possible que si $P_n = P_m + c_{n,m}$, où $c_{n,m}$ est une constante [2]. Par conséquent, à partir du rang n_0 on a $P_n = P_{n_0} + c_n$, et la suite (c_n) doit être de Cauchy, donc converger vers $c \in \mathbb{R}$. Alors la suite (P_n) converge vers le polynôme $P = P_{n_0} + c$. Par conséquent, si une fonction $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales, alors f est elle-même une fonction polynomiale. On voit donc que la conclusion du théorème de Stone-Weierstrass est fausse sur $\mathbb{R}$: une fonction continue sur $\mathbb{R}$ n'est en général pas limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

5. Supposons qu'il existe une fonction $g \in C_b(\mathbb{R})$ telle que $f * g = f$ pour toute $f \in L^1(\mathbb{R})$. En particulier, on doit avoir $h_n * g = h_n$ pour tout n ; mais on a vu que $h_n * g$ converge simplement vers g quand n tend vers $+\infty$. Par conséquent g doit être la limite simple de la suite (h_n). Mais les calculs faits précédemment montrent $h_n(x)$ tend vers 0 quand $x \neq 0$, et $h_n(0)$ tend vers 1. Par conséquent une telle fonction g ne peut pas exister.

2. Encore une erreur de l'énoncé : la suite n'est pas constante à partie d'un certain rang, seuls les termes de degré ≥ 1 le sont.