Second écrit blanc d'analyse, 23 octobre 2012, durée 5h.

L'usage de tout appareil électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est interdit, ainsi que l'emploi de documents (notes de cours, etc). Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, elle (il) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.
Les problèmes ci-dessous sont indépendants. Le soin apporté à la rédaction de vos réponses sera pris en compte lors de la correction.

Problème 1.

On rappelle que, si f est une fonction continue par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodique, ses *coefficients de Fourier* $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ sont définis par :

$$\forall n \in \mathbb{Z}\ c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x)\,dx\ .$$

On appelle *série de Fourier* de f la série de fonctions $c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty}(c_n(f)e^{inx} + c_{-n}(f)e^{-inx})$.

On admettra que l'égalité de Parseval est vraie, c'est-à-dire le fait que, pour deux fonctions f, g 2π-périodiques et continues par morceaux, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\bar{g}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\overline{c_n(g)}\ .$$

En particulier, on a $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ pour toute fonction f 2π-périodique et continue par morceaux.

Partie I. Convergence normale des séries de Fourier de fonctions C^1.

Dans cette partie on cherche à prouver que, si f est 2π-périodique et de classe C^1, alors sa série de Fourier converge normalement vers f.

1. Montrer que, si f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et 2π-périodique telle que $c_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors f est la fonction nulle. Ce résultat est encore vrai si f est seulement supposée continue par morceaux ?
2. On fixe $m \in \mathbb{Z}$. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction $x \mapsto e^{imx}$.
3. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodique, dont la série de Fourier converge uniformément vers une fonction g.
   (a) Justifier que g est continue sur $\mathbb{R}$ puis, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, exprimer $c_n(g)$ en fonction de $c_n(f)$.
   (b) Montrer que $g = f$.
4. On suppose jusqu'à la fin du problème que f est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodique, et de classe C^1. Pour tout entier naturel non nul n et tout réel x, on pose $u_n(x) = c_{-n}(f)e^{-inx} + c_n(f)e^{inx}$.
   (a) Déterminer une relation entre $c_n(f')$ et $c_n(f)$.
   (b) Montrer que, pour tout réel x et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$|u_n(x)| \leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2}(|c_n(f')|^2 + |c_{-n}(f')|^2)\ .$$

(c) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, et préciser vers quelle fonction.

(d) Enoncer le théorème qu'on vient de démontrer.
On admettra dans la suite du problème que ce théorème est encore valable dans le cas où f est continue et de classe C^1 *par morceaux.*

Partie II. Application : inégalité de Wirtinger et inégalité isopérimétrique.

1. Dans cette question, on considère une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^1, 2π-périodique et telle que $\int_0^{2\pi} f(t)\, dt = 0$.
   (a) En utilisant l'égalité de Parseval, et le résultat de I.4, montrer l'inégalité de Wirtinger :
   $$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\, dt\ .$$
   (b) Montrer que le seul cas où l'inégalité précédente est une égalité est le cas où il existe des nombres complexes A, B tels que $f(x) = Ae^{ix} + Be^{-ix}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Dans la fin du problème, on va comparer la longueur d'une courbe simple, fermée, lisse, tracée dans le plan euclidien, identifié à $\mathbb{C}$, et l'aire du domaine délimité par cette courbe. Soit Γ une telle courbe ; on admet qu'on peut trouver un paramétrage $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ de Γ tel que γ soit de classe C^1 par morceaux sur $[0, 2\pi]$, $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$, γ soit injectif sur $[0, 2\pi[$ et $|\gamma'(t)|$ soit constant sur $[0, 2\pi]$ (on dit que la courbe est paramétrée par *l'abscisse curviligne*). On note $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$; on suppose de plus que la courbe est orientée positivement, c'est-à-dire parcourue dans le sens trigonométrique direct. On rappelle qu'alors la longueur de Γ, notée l, et l'aire de Γ, notée A, sont données par les formules suivantes :
   $$l = \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|\, dt; \quad A = \int_0^{2\pi} x(t)y'(t)\, dt\ .$$
   (a) En utilisant le fait que $|\gamma'(t)|$ est constant, montrer que $l^2 = 2\pi \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|^2$.
   (b) En déduire que
   $$l^2 - 4\pi A = 2\pi \int_0^{2\pi} \left((x'(t))^2 + (y'(t))^2 - 2x(t)y'(t)\right)\, dt\ .$$
   (c) A l'aide de l'inégalité de Wirtinger, prouver que
   $$l^2 - 4\pi A \geq \int_0^{2\pi} (x(t) - y'(t))^2\, dt.$$
   (d) Montrer que, pour que l'on a toujours $l^2 - 4\pi A \geq 0$ et que, pour que $l^2 - 4\pi A = 0$, il est nécessaire qu'il existe des constantes réelles α, β telles que $x(t) = \alpha\cos(t) + \beta\sin(t)$, et $y'(t) = x(t)$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$ tel que y soit dérivable en t.
   (e) En déduire que dans le cas où $l^2 = 4\pi A$ Γ est un cercle.
   (f) Montrer que dans le cas où γ est un cercle, on a bien $l^2 = 4\pi A$.
   (g) Montrer que, parmi toutes les courbes simples, fermées, lisses de longueur 2π, un cercle de rayon 1 est l'unique courbe qui délimite un domaine d'aire π : à longueur fixée, un cercle est la courbe qui délimite un domaine d'aire maximale (c'est l'*inégalité isopérimétrique*).

Problème 2.

Partie I : Continuité et dérivabilité des intégrales à paramètres généralisées.

On rappelle le théorème suivant, dit *théorème de convergence dominée*, qu'on pourra utiliser sans démonstration :

> Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction continue par morceaux sur J, et (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux qui converge simplement vers f sur J. S'il existe une fonction g positive et intégrable sur J telle que $|f_n(x)| \leq g(x)$ pour tout $x \in J$ et tout $n \in \mathbb{N}$, alors on a
>
> $$\lim_{n\to+\infty} \int_J f_n(x)\,dx = \int_J f(x)\,dx\ .$$

Dans cette partie, on cherche à établir des théorèmes sur la continuité et la dérivabilité d'intégrales à paramètres sur $]a,+\infty[$, où a est un réel fixé. On suppose maintenant que I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et que f est une fonction de $I\times]a,+\infty[\to \mathbb{C}$. Pour tout $x \in I$ on pose

$$F(x) = \int_a^{+\infty} f(x,t)\,dt \quad \text{(si cette intégrale converge).}$$

1. On suppose dans cette question que $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $]a,+\infty[$ pour tout $x \in I$, et qu'il existe une fonction g positive et intégrable sur $]a,+\infty[$ telle que $|f(x,t)| \leq g(t)$ pour tout $(x,t) \in I\times]a,+\infty[$.
   (a) Montrer que $F(x)$ est bien définie pour tout $x \in I$.
   (b) On fixe $x \in I$, et on considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I qui converge vers x. Pour $t \in]a,+\infty[$ on pose $h_n(t) = f(x_n,t)$. Montrer que (h_n) converge simplement vers $t \mapsto f(x,t)$, et que $|h_n(t)| \leq g(t)$ pour tout n.
   (c) Montrer que F est continue sur I.

2. Dans cette question, on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ par $g(x,t) = \dfrac{\sin(xt)}{t}$.
   (a) Montrer que g est une fonction continue.
   (b) En utilisant une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,du$ converge et donner sa valeur.
   (c) A l'aide d'un changement de variables bien choisi, montrer que la fonction G définie par $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} g(x,t)\,dt$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, et qu'on a :

   $$G(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

   Cette fonction est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Cela contredit-il le résultat de la question précédente ?

3. On fait maintenant les hypothèses suivantes sur f :

- Pour tout $x \in I$ la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est dérivable sur $]a,+\infty[$, autrement dit $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ existe pour tout $(x,t) \in I \times]a,+\infty[$, et pour tout $x \in I$ la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue.
- Il existe $x_0 \in I$ tel que $F(x_0)$ converge (on fixe un tel x_0).
- Il existe une fonction g positive et intégrable sur $]a,+\infty[$ telle que pour tout $(x,t) \in I \times]a,+\infty[$ on ait $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq g(t)$.

(a) En utilisant l'inégalité des accroissements finis appliquée à une fonction bien choisie, montrer que pour tout $x \in I$ et tout $t \in]a,+\infty[$ on a

$$|f(x,t) - f(x_0,t)| \leq |x - x_0| g(t) \ .$$

(b) Montrer que l'intégrale définissant $F(x)$ converge pour tout $x \in I$ (on pourra commencer par étudier la convergence de $F(x) - F(x_0)$).

(c) On fixe maintenant $x \in I$, et on considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x en prenant des valeurs différentes de x. On pose, pour tout $t \in]a,+\infty[$,

$$h_n(t) = \frac{f(u_n,t) - f(x,t)}{u_n - x} \ .$$

(d) Montrer que $|h_n(t)| \leq g(t)$ pour tout $t \in]a,+\infty[$.

(e) Montrer que h_n converge simplement vers la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$.

(f) Montrer que F est dérivable et que, pour tout $x \in I$, on a

$$F'(x) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt \ .$$

(g) Montrer que F est en fait de classe C^1.

Partie II : application à un calcul d'intégrale. On souhaite définir une fonction F en posant $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 e^{-xt}\, dt$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt$ est convergente.
2. Montrer que F est bien définie et continue sur $[0,+\infty[$.
3. Montrer que F est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ (on pourra commencer par montrer que F est deux fois dérivable sur $]a,+\infty[$ pour tout $a > 0$).
4. Calculer $F''(x)$ pour $x > 0$.
5. Calculer les limites en $+\infty$ de F' et F (on pourra utiliser le théorème de convergence dominée).
6. En déduire que, pour tout $x > 0$, on a

$$F'(x) = \frac{1}{2}\ln(x) - \frac{1}{4}\ln(x^2+4) \ ,$$

puis utiliser cette formule pour calculer $F(x)$ pour $x > 0$.

7. Donner la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt$.

Problème 3.

Dans ce problème, on utilise la terminologie et les notations ci-dessous :

- On note $C(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.
- On note $L^1(\mathbb{R})$ l'espace formé par les fonctions f telles que $f \in C(R)$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx$ converge. On note alors $\|f\|_1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx$.
- On note $L^2(\mathbb{R})$ l'espace formé par les fonctions f telles que $f \in C(R)$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx$ converge. On note alors $\|f\|_2 = \left(\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$.
- On note $C_b(\mathbb{R})$ l'espace formé par les fonctions bornées appartenant à $C(R)$. Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est bornée, on notera $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x))|\colon x \in \mathbb{R}\}$.
- On dit qu'une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est *à support compact* s'il existe $A \geq 0$ tel que f soit nulle en dehors du segment $[-A, A]$.
- Lorsque $f, g \in C(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$ sont telles que $t \mapsto f(t)g(x-t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$, on pose

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\, dt\ .$$

  La fonction $f * g$ est appelée *produit de convolution* de f par g.

Partie I : Généralités.

1. Dans chacun des deux cas suivants, montrer que $f * g$ est définie sur $\mathbb{R}$, bornée, et donner une majoration de $\|f * g\|_\infty$:
   (a) $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in C_b(\mathbb{R})$.
   (b) $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ (on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour montrer que $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_2\, \|g\|_2$).
2. Soit $f, g \in C(\mathbb{R})$ telles que $f*g(x)$ soit défini pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'alors $f*g = g*f$.
3. Montrer que, si f et g appartiennent à $C(\mathbb{R})$ et sont à support compact, alors $f * g$ est à support compact.

Partie II : produit de convolution d'éléments de $L^2(\mathbb{R})$.

Dans cette partie, on suppose que f et g appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$.

Pour toute fonction $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et tout réel α, on définit une nouvelle fonction $T_\alpha(h)$ en posant $T_\alpha(h)(x) = h(x-\alpha)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer qu'une fonction h est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si,
$$\lim_{\alpha \to 0} \|T_\alpha(h) - h\|_\infty = 0\ .$$
2. Montrer que, pour tout réel α, on a
$$\|T_\alpha(f * g) - f * g\|_\infty \leq \|T_\alpha(f) - f\|_2 \|g\|_2\ .$$
3. (a) Montrer que, si f est à support compact, alors $\|T_\alpha(f) - f\|_2$ tend vers 0 quand α tend vers 0 (on pourra par exemple utiliser un théorème de continuité des intégrales à paramètres).
   (b) Montrer que, si f est à support compact, alors $f * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

(c) Montrer qu'il existe une suite de fonctions continues $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, à valeurs dans $[0,1]$, telles que pour tout n on ait

$$\forall x \in [-n,n]\ k_n(x) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x\ |x| \geq n+1 \Rightarrow k_n(x) = 0\ .$$

Dans la suite de cette partie on fixe une telle suite (k_n), et on définit une suite de fonctions (f_n) sur $\mathbb{R}$ en posant $f_n(x) = k_n(x)f(x)$.

(d) Montrer que (f_n) est une suite d'élements de $C_b(\mathbb{R})$ et que $\|f_n - f\|_2$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

(e) Montrer que $\|f_n * g - f * g\|_\infty$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et en déduire que $f * g$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Partie III. Convolution et théorème de Weierstrass.
Dans cette partie, on définit une suite de fonctions $h_n \colon \mathbb{R} \to [0,+\infty[$ en posant

$$h_n(t) = \begin{cases} \dfrac{(1-t^2)^n}{\lambda_n} & \text{si } t \in [-1,1], \text{ où } \lambda_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n\, dt \\ 0 & \text{si } |t| > 1 \end{cases} .$$

1. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, h_n est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} h_n(t)\, dt = 1$ et que pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\varepsilon}^{+\infty} h_n(t)\, dt = 0 = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} h_n(t)\, dt\ .$$

   (b) Montrer que, si f est une fonction continue à support inclus dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, alors $f * h_n$ est une fonction polynomiale sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et nulle en dehors de l'intervalle $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$.

2. Dans cette question on fixe $f \in C_b(\mathbb{R})$.

   (a) Montrer que pour tout $\delta > 0$ il existe n_0 tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \geq n_0$ on ait
$$\left| \int_{-\infty}^{-\delta} f(x-t)h_n(t)\, dt \right| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \left| \int_{\delta}^{+\infty} f(x-t)h_n(t)\, dt \right| \leq \varepsilon\ .$$

   (b) Montrer que $f * h_n$ converge simplement vers f (on pourra utiliser judicieusement le fait que, pour tout $\delta > 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{-\delta}^{\delta} h_n(t)\, dt = 1$).

   (c) Montrer que, si f est uniformément continue, alors $f * h_n$ converge uniformément vers f quand n tend vers $+\infty$.

3. Donner une preuve du théorème de Weierstrass : si f est une fonction à valeurs complexes et continue sur un segment I de $\mathbb{R}$, alors f est limite uniforme (sur I) de fonctions polynomiales.

4. Existe-t-il une fonction $g \in C_b(\mathbb{R})$ et telle que $f * g = f$ pour toute $f \in L^1(\mathbb{R})$?

5. Montrer que la conclusion du théorème de Weierstrass devient fausse en général si on ne suppose pas que I est un segment.