Ecrit blanc, 9 mars 2015, durée 5h : Correction du sujet d'Analyse.

Problème 1.

Il s'agissait de questions issues d'un des problèmes de la première épreuve de le sessions de 2012 du Capes, dont on trouve facilement un corrigé sur Internet.

Problème 2.

Partie A. Calculs préliminaires.

1. Comme la fonction sin est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, on peut lui appliquer l'égalité des accroissements finis et obtenir que, pour tout $x \in]0,\pi]$, il existe $c \in]0,x[$ tel que

$$\sin(x) = \sin(x) - \sin(0) = \sin'(c)(x-0) = \cos(c)x$$

Comme $\cos(c) \leq 1$ et $x > 0$, on en déduit que $\sin(x) \leq x$ sur $]0,\pi[$; cette inégalité est vraie aussi en $x = 0$ (dans ce cas c'est une égalité).

On sait bien que sin est positive sur $[0,\pi]$ et on a donc obtenu notre première inégalité.

Pour montrer la deuxième, faisons un dessin : $x \mapsto \dfrac{2}{\pi}x$ est l'équation de la droite passant par $(0,0)$ et $(\dfrac{\pi}{2},1)$, autrement dit c'est l'équation de la corde reliant $(0,\sin(0))$ et $(\dfrac{\pi}{2},\sin(\dfrac{\pi}{2}))$. On doit donc montrer que la courbe représentative de sin est au-dessus d'une de ses cordes, ce pour quoi il suffit de montrer que sin est concave sur $[0,\dfrac{\pi}{2}]$; c'est le cas puisque sa dérivée seconde est $-\cos$, qui est négative sur l'intervalle qui nous intéresse.

Si jamais on n'aime pas les preuves géométriques, on peut par exemple étudier la fonction $\dfrac{\sin(x)}{x}$, dont la dérivée est négative sur $]0,\dfrac{\pi}{2}[$; on en conclut que cette fonction est décroissante sur $]0,\dfrac{\pi}{2}[$, en particulier pour tout $x \in]0,\dfrac{\pi}{2}[$ on a $\dfrac{\sin(x)}{x} \geq \dfrac{\sin(\frac{\pi}{2})}{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{2}{\pi}$. Ceci nous donne l'inégalité désirée sur $]0,\dfrac{\pi}{2}[$, et elle est aussi vraie en 0 (où c'est une égalité).

2. On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique, dont la raison est e^{ix}, qui est différent de 1 puisque $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Par conséquent on peut écrire (avec $r = p-q+1$ pour simplifier la notation) :

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{q} e^{ikx} &= e^{ipx}\frac{1-e^{irx}}{1-e^{ix}} \\ &= e^{ipx}\frac{e^{\frac{irx}{2}}2i\sin(\frac{rx}{2})}{e^{\frac{ix}{2}}2i\sin(\frac{x}{2})}\end{aligned}$$

On en déduit comme attendu que $\left|\displaystyle\sum_{k=p}^{q} e^{ikx}\right| \leq \dfrac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

3. (a) Soit (p,q) un couple d'entiers naturels tel que $0 \leq p \leq q-1$. Pour tout $k \in \{p+1,\ldots,q\}$ on

a $v_k = V_k - V_{k-1}$, et on peut donc écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p+1}^{q} u_k v_k &= \sum_{k=p+1}^{q} u_k (V_k - V_{k-1}) \\
&= \sum_{k=p+1}^{q} u_k V_k - \sum_{k=p+1}^{q} u_k V_{k-1} \\
&= \sum_{k=p+1}^{q} u_k V_k - \sum_{k=p}^{q-1} u_{k+1} V_k \\
&= u_q V_q + \sum_{k=p+1}^{q-1} (u_k - u_{k+1}) V_k - u_{p+1} V_p \ .
\end{aligned}$$

(b) Soit M tel que l'on ait $V_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\varepsilon > 0$. Comme $\sum |u_k - u_{k+1}|$ converge, le critère de Cauchy nous garantit l'existence d'un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout couple d'entiers (p, q) avec $N \leq p \leq q$, on ait $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} |u_k - u_{k+1}| \leq \varepsilon$. Comme (u_n) tend vers 0, on peut aussi supposer que $|u_n| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. En appliquant le résultat de la question précédente, on obtient que pour tout tel couple (p, q) on a

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=p+1}^{q} u_k v_k \right| &= \left| u_q V_q + \sum_{k=p+1}^{q-1} (u_k - u_{k+1}) V_k - u_{p+1} V_p \right| \\
&\leq |u_q V_q| + |u_{p+1} V_p| + \sum_{k=p+1}^{q-1} |u_k - u_{k+1}| |V_k| \\
&\leq \varepsilon M + \varepsilon M + M \sum_{k=p+1}^{q-1} |u_k - u_{k+1}| \\
&\leq 3\varepsilon M
\end{aligned}$$

On vient de montrer que $\sum u_k v_k$ satisfait le critère de Cauchy ; par conséquent cette série est convergente.

(c) Si (u_n) est décroissante et converge vers 0, alors pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a

$$\sum_{k=0}^{N} |u_k - u_{k+1}| = \sum_{k=0}^{N} u_k - u_{k+1} = u_0 - u_N \ .$$

Par conséquent la série $\sum |u_k - u_{k+1}|$ est convergente, et toutes les hypothèses de la question précédente sont satisfaites : on peut donc conclure que la série $\sum u_n v_n$ est convergente.

(d) Si on pose $u_k = \dfrac{1}{k}$ et $v_k = \cos(kx)$ pour tout $k \geq 1$, alors (u_k) est décroissante vers 0, et pour $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ on peut écrire

$$|V_n| = \left| \text{Ré} \left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} \right) \right| \leq \left| \sum_{k=1}^{n} e^{ikx} \right| \leq \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Le résultat de la question précédente nous permet de conclure que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(kx)}{k}$ est convergente quand $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$; le même raisonnement (en remplaçant partie réelle par partie imaginaire) nous permet de conclure que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$ converge quand $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

Quand $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, on a affaire à $\sum \frac{\cos(kx)}{k} = \sum \frac{1}{k}$, qui diverge ; et à $\sum \frac{\sin(kx)}{k} = \sum 0$, qui est trivialement convergente.

Partie B. Quelques exemples.

1. Dire que le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est égal à R_a est équivalent à dire que $a_n r^n$ tend vers 0 pour tout $r \in [0, R_a[$ et ne tend pas vers 0 pour tout $r > R_a$. En utilisant l'égalité $b_n = a_n R_a^n$, on voit que ceci est équivalent à dire que $b_n (\frac{r}{R_a})^n$ tend vers 0 pour tout $r \in [0, R_a[$ et diverge pour tout $r \in]R_a, +\infty[$; autrement dit $b_n r^n$ converge pour tout $r \in [0, 1[$ et diverge pour tout $r \in]1, +\infty[$, ce qui signifie que le rayon de convergence de $\sum b_n z^n$ est égal à 1.
2. (a) Pour tout z de module 1, on a $\sum |a_n z^n| = \sum |a_n|$, qui converge ; par conséquent $\sum a_n z^n$ est absolument convergente et donc convergente. Dans ce cas C_a est donc égal au cercle unité tout entier.

   (b) Le maximum de $|f_n|$ sur $[-\pi, \pi]$ est égal à $|a_n|$, et $\sum |a_n|$ converge. Donc la série $\sum |f_n|$ converge normalement sur $[-\pi, \pi]$; et par conséquent elle converge uniformément sur cette intervalle. Comme une limite uniforme d'une série de fonctions continues est continue, on en déduit que sa limite est une fonction continue sur $[-\pi, \pi]$.

   (c) D'après le résultat de la question précédente, il nous suffit de fournir une série absolument convergente et dont le rayon de convergence vaut 1. Par exemple, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$ convient (convergence absolue par le critère de Riemann, et rayon de convergence égal à 1 par exemple en utilisant le critère de d'Alembert).
3. Soit $a_n = 1$ pour tout n. Alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ vaut 1, mais pour tout z de module 1 la série $\sum a_n z_n$ diverge grossièrement (son terme général ne tend pas vers 0) et donc C_a est vide.
4. (a) Une caractérisation du rayon de convergence R est que, pour tout z de module strictement inférieur à R la série $\sum a_n z^n$ converge absolument, et pour tout z de module strictement supérieur à R la série $\sum a_n z^n$ diverge. Le fait que $\sum a_n z_0^n$ converge nous dit donc que $R \geq 1$, et le fait que $\sum |a_n|$ diverge nous dit que $R \leq 1$. Par conséquent $R = 1$.

   (b) Nous sommes confrontés à la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n\xi^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{z}{\xi}\right)^n$. Ici on pourrait être tenté de reconnaître un logarithme, mais nous sommes en train de manipuler une série à coefficients complexes... Fixons z de module 1 et différent de ξ. En posant $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{z}{\xi}$ les hypothèses de la question A(3c) sont satisfaites, et on peut donc conclure que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{z}{\xi}\right)^n$ est convergente pour $z \neq \xi$. Cette série est divergente pour $z = \xi$ (série harmonique). Dans ce cas particulier, C_a est donc égal au cercle unité privé de ξ.

   (c) Etant donné le résultat de la question précédente, on peut avoir envie de considérer le produit $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\xi_1^n}\right) \cdots \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\xi_p^n}\right)$. En effet, un produit de séries entières qui sont toutes de rayon de convergence 1 s'écrit encore sous forme de série entière de rayon de convergence 1 (en effectuant le produit de Cauchy, qui correspond à regrouper selon les puissances de z). Mais il est difficile de contrôler le comportement d'une telle série au bord du disque de convergence : la raison en est que, si le produit de Cauchy de deux séries absoluement convergentes est une série absolument convergente, le produit de Cauchy de deux séries semi-convergentes (ce qui est notre cas ici) n'est pas toujours une série convergente.

   Plutôt qu'un produit, on peut plutôt considérer une somme, c'est-à-dire définir

$$a_n = \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{n\xi_j^n} \ .$$

La série entière associée s'écrit comme la somme de p séries entières qui sont chacune de rayon de convergence 1, et converge sur tout le cercle unité sauf en un point (la j-ième série diverge en ξ_j). Comme la somme d'un nombre fini de séries convergentes est une série convergente, et que la somme d'une série convergente et d'une série divergente est une série divergente, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$ converge sur tout le cercle unité sauf en $\xi_1, \ldots, \xi_p$.

(d) On se doute que le rayon de convergence va être 1 ; étudions $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{n} z^n$ quand z est de module 1, c'est-à-dire quand $z = e^{i\alpha}$ (avec $\alpha \in [0, 2\pi[$ par exemple). Comme $\cos(n) = \frac{e^{in} + e^{-in}}{2}$, le terme général de cette série est égal à

$$\frac{e^{in} e^{in\alpha}}{2n} + \frac{e^{-in} e^{in\alpha}}{2n} = \frac{e^{in(1+\alpha)}}{2} + \frac{e^{in(1-\alpha)}}{2}$$

Par le même raisonnement qu'à la question précédente, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n \cos(n)}{n}$ converge donc pour tout z de module 1 sauf pour $z = e^{-i}$ et $z = e^{i}$. Comme C_a n'est donc pas égal au cercle unité tout entier, on peut en conclure que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{\cos(n)}{n} \right|$ n'est pas convergente.

Partie C. Un exemple pour lequel C_a est le cercle unité et $\sum |a_n|$ diverge.

1. La suite $|a_n|$ est décroissante. De plus, on a $(p+1)^2 \geq 2p^2$ pour tout $p \geq 2$, et donc la définition de $|a_n|$ entraîne que $|a_n| \geq \frac{1}{2n}$ pour tout $n \geq 4$. La divergence de la série harmonique entraîne que $\sum |a_n|$ diverge.
   Pour voir que $\sum a_n$ converge, on peut par exemple utiliser le critère de Cauchy : si on somme tous les (a_n) pour n variant entre p^2 et $(p+1)^2 - 1$, pour un $p \in \mathbb{N}$ donné, alors on obtient

$$\sum_{n=p^2}^{(p+1)^2-1} a_n = (-1)^p \frac{(p+1)^2 - p + 1}{p^2} = (-1)^p \frac{(2p+1}{p^2} = (-1)^p \left(\frac{2}{p} + \frac{1}{p^2} \right) .$$

   Fixons maintenant $\varepsilon > 0$, et prenons N tel que pour tout $j \geq i \geq N$ on ait à la fois

$$\left| \sum_{k=i}^{j} \frac{(-1)^k}{k} \right| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \sum_{k=i}^{j} \frac{1}{k^2} \leq \varepsilon$$

   (La première série converge par le critère des séries alternées, la deuxième converge d'après le critère de Riemann)
   Soit maintenant $m \geq n \geq (N+1)^2$. Soit p_1 le plus petit carré d'entier plus grand que n, et p_2 le plus grand entier plus petit que m. Alors on a

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| = \left| \sum_{k=n}^{p_1} a_k + \sum_{k=p_1}^{p_2-1} a_k + \sum_{k=p_2}^{m} a_k \right|$$

   En découpant et en utilisant le calcul fait ci-dessus, on voit que la somme ci-dessus est inférieure à 6ε, ce qui permet de voir que le critère de Cauchy est vérifié.

2. Soit n un entier. Pour calculer $a_{n+1} - a_n$, on doit envisager deux cas : il existe un entier p tel que $p^2 \leq n < (p+1)^2 - 1$, auquel cas $a_n = a_{n+1}$; ou bien il existe un entier p tel que $n = (p+1)^2 - 1$, auquel cas on a

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)^2} + \frac{(-1)^{p+1}}{p^2} .$$

En particulier, on voit que $|a_{n+1} - a_n|$ vaut 0 pour tous les entiers n sauf ceux qui sont de la forme $(p+1)^2 - 1$, et qu'alors $|a_{n+1} - a_n|$ est égal à $\dfrac{1}{(p+1)^2} + \dfrac{1}{p^2}$; la série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ est donc de même nature que $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{p^2} \right)$, qui est convergente.

3. On sait que $R_a = 1$ puisque $\sum |a_n|$ est divergente mais $\sum a_n$ est convergente. Soit z un nombre complexe de module 1 ; en posant $u_n = a_n$, $v_n = z^n$ les hypothèses pour appliquer le résultat de A(3b) sont réunies si $z \neq 1$, et on conclut donc que $\sum a_n z^n$ converge dans ce cas. On a déjà vu que $\sum a_n z^n$ converge si $z = 1$, par conséquent C_a est le cercle unité tout entier.