Problème d'analyse, écrit blanc du 10 mars 2016.

L'usage de tout appareil électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est interdit, ainsi que l'emploi de documents (notes de cours, etc). Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, elle (il) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

Notations et rappels

– On désignera par $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$; $\mathbb{R}[X]$ désigne l'espace vectoriel de tous les polynômes à coefficients réels et, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ formé par les polynômes de degré au plus n.

– Dans tout le problème f désigne un élément de $\mathcal{C}$.

– On rappelle que, si $(k,n) \in \mathbb{N}^2$, alors $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial dont la valeur est $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ si $k \in \{0,\dots,n\}$ et 0 sinon.

– Pour $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ on appelle k-ième polynôme de Bernstein d'ordre n le polynôme $B_{k,n}$ donné par :

$$B_{k,n}(X) = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} .$$

On pose aussi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_{-1,n}(X) = 0$.

– On considèrera dans ce problème un espace probabilisé (Ω, P). On rappelle qu'une variable aléatoire suit une loi de Bernoulli si $X(\Omega) = \{0,1\}$. On dit que p est le paramètre de cette loi si $P(X=1) = p$.

– On considèrera une suite $(X_k)_{k\geq 1}$ de variables aléatoires réelles, indépendantes et identiquement distribuées, suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre p, où $p \in [0,1]$ est fixé dans tout le problème. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on notera $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $T_n = \frac{S_n}{n}$.

– Pour X une variable aléatoire réelle, on note, sous réserve d'existence, $E(X)$ son espérance et $V(X)$ sa variance.

Début du problème.

1. Donner, en la justifiant, la loi de S_n.
2. Déduire de ce premier résultat les propriétés suivantes :
   (a) $\forall k \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq B_{k,n}(p) \leq 1$.
   (b) $\forall k \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad B_{k,n}(p) = B_{n-k,n}(1-p)$.
   (c) et (pour $n \in \mathbb{N}$) les valeurs de :
      i. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} B_{k,n}(p)$.
      ii. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kB_{k,n}(p)$.

iii. $\sum_{k=0}^{n}(k-np)^2 B_{k,n}(p)$.

3. Dans cette question on fixe $n \geq 2$ et $k \in \{0, \ldots, n\}$.
   (a) Calculer $P(S_n = k)$ en fonction de $P(S_{n-1} = k)$ et $P(S_{n-1} = k-1)$.
   (b) En déduire l'expression de $B_{k,n}$ en fonction de $B_{k,n-1}$ et $B_{k-1,n-1}$.
4. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que, si $P \in \mathbb{R}[X]$ s'écrit sous la forme $P(X) = X^k Q(X)$ avec $Q(0) \neq 0$, alors on a $P^{(i)}(0) = 0$ pour tout entier naturel $i < k$, et $P^{(k)}(0) \neq 0$ (on pourra essayer de raisonner par récurrence sur k).
   (b) Montrer que la famille $(B_{k,n}(X))_{0 \leq k \leq n}$ forme une famille libre dans $\mathbb{R}[X]$.
   (c) Montrer que la famille $(B_{k,n}(X))_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. On fixe de nouveau $n \in \mathbb{N}^*$, et on définit une application B_n de $\mathcal{C}$ vers $\mathbb{C}[X]$ par

$$\forall g \in \mathcal{C} \quad B_n(g) = \sum_{k=0}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right) B_{k,n} \ .$$

   (a) Montrer que la restriction de B_n à $\mathbb{R}_n[X]$ induit un automorphisme linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $P = B_n(Q)$. Un tel Q est-il unique ?
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle ici que $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, que $T_n = \frac{S_n}{n}$, que les variables aléatoires $(X_k)_{k \geq 1}$ sont indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi de Bernoulli de paramètre p, et que f est une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $E(f(T_n)) = B_n(f)(p)$.
   (b) Montrer que $B_n(f)(p) - f(p) = E(f(T_n)) - f(E(T_n))$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que $V(T_n) = \frac{p(1-p)}{n}$.
   (b) Montrer que, pour tout $\delta > 0$, on a

$$P(|T_n - p| \geq \delta) \leq \frac{1}{4n\delta^2} \ .$$

8. Dans cette question I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $\varphi \colon I \to \mathbb{R}$ est une fonction, on rappelle que φ est dite convexe si $\varphi(ta + (1-t)b) \leq t\varphi(a) + (1-t)\varphi(b)$ pour tout $(a,b) \in I^2$ et tout $t \in [0,1]$.
   (a) Montrer que $\varphi \colon I \to \mathbb{R}$ est convexe si, et seulement si,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x_1, \ldots x_n \in I \ \forall t_1, \ldots t_n \in [0,1] \quad \sum_{i=1}^{n} t_i = 1 \Rightarrow \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i \varphi(x_i) \ .$$

   (b) Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans un ensemble fini, et φ une fonction définie et convexe sur un intervalle contenant l'ensemble des valeurs prises par X. Montrer qu'alors on a

$$\varphi(E(X)) \leq E(\varphi(X)) \ .$$

9. Dans cette question, on va redémontrer le théorème de Heine, selon lequel toute fonction continue sur $[0,1]$ et à valeurs réelles est uniformément continue. On suppose que $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ n'est pas uniformément continue.
   (a) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \exists x_n, y_n \in [0,1] \ |x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \text{ et } |g(x_n) - g(y_n)| \geq \varepsilon \ .$$
   (b) Montrer que, si $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante, alors on a $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Justifier qu'il existe deux sous-suites convergentes $(x_{\varphi(n)})$ et $(y_{\varphi(n)})$ telles que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \ |x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| \leq \frac{1}{n} \text{ et } |g(x_{\varphi(n)}) - g(y_{\varphi(n)})| \geq \varepsilon \ .$$
   (d) Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que g n'est pas continue en x.
   (e) Conclure.
10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que $|B_n(f)(p) - f(p)| \leq E(|f(T_n) - f(p)|)$ (on pourra penser à utiliser les résultats de (6b) et (8b)).
   (b) On fixe $\delta > 0$. On note
   $$M_1 = \sup(\{|f(x)|\colon x \in [0,1]\}) \quad \text{et} \quad M_2 = \sup\{|f(y) - f(x)|\colon x, y \in [0,1] \text{ et } |x-y| \leq \delta\} \ .$$
   Justifier que M_1 et M_2 sont finis, et montrer que
   $$|B_n(f)(p) - f(p)| \leq M_2 P(|T_n - p| \leq \delta) + 2M_1 P(|T_n - p| \geq \delta) \ .$$
   (c) Montrer que la suite $(B_n(f))$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
11. Prouver le théorème de Weierstrass : pour tous réels $a < b$, chaque fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ est une limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de polynômes.
12. La résultat précédent reste-t-il vrai si l'on remplace $[a,b]$ par $\mathbb{R}$? On pourra essayer de démontrer qu'une limite uniforme de polynômes est encore un polynôme.
13. Montrer que la limite uniforme d'une suite de fonctions uniformément continues est uniformément continue. Toute fonction continue sur $\mathbb{R}$, et à valeurs réelles, est-elle une limite uniforme d'une suite fonctions uniformément continues ?