Séries de Fourier

Notations.

Dans toute la feuille on note $(c_n(f))_{n\in\mathbf{Z}}$ les coefficients de Fourier complexes d'une fonction intégrable f : $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{[-\pi,\pi]} f(t)e^{-\mathrm{i}nt}dt$.
Pour $N \in \mathbf{N}$, la N-ième somme partielle de la série de Fourier de f est notée $S_N(f)$; par définition on a pour tout x l'égalité $S_N(f)(x) = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{\mathrm{i}nx}$.

Révisions de cours.

Lemme de Riemann-Lebesgue.
Soit $[a, b]$ un segment, et $f \in L^1([a, b])$. On souhaite montrer que $\displaystyle\int_{[a,b]} e^{\mathrm{i}\lambda t}f(t)dt$ tend vers 0 quand $\lambda \to \pm\infty$.

1. Commencer par traiter le cas où f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
2. Conclure en utilisant un argument de densité.

Convergence L^2 des séries de Fourier.
On se place sur $E = L^2([-\pi, \pi])$. On rappelle qu'un *polynôme trigonométrique* est une combinaison linéaire de fonctions de la forme $t \mapsto e^{\mathrm{i}nt}$, où $n \in \mathbf{Z}$. Ici on admet que les polynômes trigonométriques sont denses dans E (ce qui suit par exemple du théorème de Fejér qu'on démontre plus bas).

1. Faire le lien entre la N-ième somme partielle de la série de Fourier de $f \in E$ et la projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie de E.
2. Montrer que, pour tout $f \in E$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \|S_N(f) - f\|_2 \to 0$
3. Rappeler les énoncés de l'égalité de Parseval et de l'inégalité de Bessel, et les démontrer.
4. Montrer que si $f, g \in E$ sont telles que $c_n(f) = c_n(g)$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$ alors $f = g$. Est-il vrai que si deux fonctions continues par morceaux ont les mêmes coefficients de Fourier alors elles sont égales ?

Théorème de convergence normale de Dirichlet.
On suppose que $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ est continue, 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{Z}$ on a $c_n(f') = \mathrm{i}nc_n(f)$.
2. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que la série de Fourier de f converge normalement vers f.

Théorème de Dirichlet-Jordan.
On suppose que $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Pour $N \in \mathbf{N}$ et $t \in \mathbf{R}$ on note $D_N(t) = \displaystyle\sum_{k=-N}^{N} e^{\mathrm{i}kt}$.

1. Montrer que pour tout $N \in \mathbf{N}$ et tout $t \in \mathbf{R}$ on a $D_N(t) = \dfrac{\sin\left((N+\frac{1}{2})t\right)}{\sin(\frac{t}{2})}$ (que signifie cette formule quand $t = 0$ modulo 2π ?) et que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)dt = 2\pi$.

2. Montrer que pour tout $N \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}$ on a

$$\begin{aligned} S_N(f)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_N(x-t)dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} D_N(t)dt \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbf{R}$ on note $\tilde{f}(x) = \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$.

3. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $N \in \mathbf{Z}$ on a

$$S_N(f)(x) - \tilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\left((N+\frac{1}{2})t\right) \frac{f(x+t)+f(x-t)-f(x^+)-f(x^-)}{\sin(\frac{t}{2})}dt$$

4. À l'aide du lemme de Riemann-Lebesgue, montrer que $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N(f)(x) = \tilde{f}(x)$.

Théorème de Fejér.

On suppose que $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ est 2π-périodique et continue. Pour $N \in \mathbf{Z}$ on note $\sigma_N(f) = \dfrac{1}{N+1}\displaystyle\sum_{n=0}^{N} S_n(f)$ et $F_N(x) = \dfrac{1}{N+1}\displaystyle\sum_{n=0}^{N} D_n(x)$ (où D_n est le noyau de Dirichlet défini plus haut).

1. Montrer que pour tout $N \in \mathbf{N}$ on a $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F_N(f)(x)dx = 2\pi$ et $F_N(x) = \dfrac{1}{N+1}\left(\dfrac{\sin\left(\frac{N+1}{2}x\right)}{\sin(\frac{x}{2})}\right)^2$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.
2. En utilisant une formule établie lors de la preuve du théorème de Dirichlet-Jordan, montrer que pour tout $N \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}$ on a $\sigma_N(f)(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)F_N(t)dt$
3. Soit $\eta \in]0,\pi]$. Montrer que $\displaystyle\int_{\eta\le|t|\le\pi} F_N(t)dt$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$.
4. En utilisant le théorème de Heine, montrer que $(\sigma_N(f))_{N\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbf{R}$.

Exercices

Exercice 1. Calculer les coefficients de Fourier réels et complexes de la fonction $f\colon x \mapsto (\cos(x))^3$.

Exercice 2. Soit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction 2π-périodique telle que $f(x) = e^x$ pour tout $x \in]-\pi,\pi]$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f.
2. Étudier la convergence de la série de Fourier de f.
3. Donner les valeurs de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Exercice 3. Soit $\alpha \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Z}$ et f la fonction 2π-périodique telle que $f(x) = \cos(\alpha x)$ pour tout $x \in [-\pi,\pi[$.

1. Déterminer les coefficients de Fourier de f.
2. Montrer que si $t \notin \pi\mathbf{Z}$ on a l'égalité

$$\operatorname{cotan}(t) = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2t}{t^2-n^2\pi^2}$$

Exercice 4. Pour $x \in \mathbf{R}$, on pose $f(x) = d(x, \mathbf{Z})$.

1. Rappeler la définition de f ; montrer que f est continue, paire et 1-périodique. Donner une formule simple permettant de calculer $f(x)$ pour $x \in [0, 1]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f et décrire le mode de convergence de sa série de Fourier.
3. En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$.

Exercice 5. Soit $f \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 2π-périodique impaire telle que $f(x) = 1$ pour $x \in]0, \pi[$, $f(\pi) = 0$.

1. Calculer les coefficients de Fourier réels de f.
2. Étudier la convergence de la série de Fourier de f.
3. Donner les valeurs des sommes suivantes :
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \; ; \; \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \; ; \; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$
4. Pour $t \in \mathbf{R}$ on note $S_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{4}{\pi(2k+1)} \sin((2k+1)t)$. Montrer que
$$\forall t \notin \pi\mathbf{Z} \quad S_n'(t) = \frac{2}{\pi} \frac{\sin(2(n+1)t)}{\sin(t)}$$
En déduire les variations de S_n.
5. Soit $M_n = S_n\left(\dfrac{\pi}{2(n+1)}\right)$. Montrer que
$$\lim_{n \to +\infty} M_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u} du$$
6. On suppose que g est 2π-périodique, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et que $\delta \in]0, \pi[$ est tel que g soit continûment dérivable sur $[-\delta, \delta] \setminus \{0\}$. Étudier les limites de $S_N(g)(x + \frac{\pi}{N})$ et $S_N(g)(x - \frac{\pi}{N})$ (*phénomène de Gibbs*).

Exercice 6. On note E l'espace vectoriel des fonctions continues 2π-périodiques de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, et on considère l'application $\varphi \colon E \to \mathbf{C}^{\mathbf{Z}}$ qui à $f \in E$ associe la suite $(c_n(f))_{n \in \mathbf{Z}}$ de ses coefficients de Fourier complexes.

1. Montrer que φ est injective.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \ell_2(\mathbf{Z})$, puis que $\mathrm{Im}(\varphi)$ est dense dans $\ell_2(\mathbf{Z})$.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(\varphi) \neq \ell_2(\mathbf{Z})$.
4. On note F l'espace des fonctions 2π-périodiques de classe $\mathcal{C}^\infty$. Donner une caractérisation simple de $\varphi(F)$.

Exercice 7. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = |\sin(x)|$.

1. Développer f en série de Fourier réelle. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$ et montrer que pour tout x on a $|\sin(x)| = \dfrac{8}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sin(nx))^2}{4n^2 - 1}$.
2. Soit h une fonction continue par morceaux sur un intervalle compact $[a, b]$ de $\mathbf{R}$. Montrer que
$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b h(x) |\sin(\lambda x)| dx = \frac{2}{\pi} \int_a^b h(x) dx$$

Exercice 8. Résoudre l'équation différentielle $y''(t) + y(t) = |\sin(t)|$ (on pourra utiliser les calculs faits à la première question de l'exercice précédent)

Exercice 9. *Inégalité de Poincaré, cas particulier.*
Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(a) = f(b) = 0$.

1. Dans cette question, on suppose $a = 0$, $b = \pi$.
   (a) Déterminer une fonction $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 2π-périodique et impaire qui coïncide avec f sur $[0, \pi]$. Que vaut $c_0(g)$? Quelle est la régularité de g ?
   (b) Exprimer $\int_0^\pi f(x)^2 dx$ et $\int_0^\pi f'(x)^2 dx$ en fonction des coefficients de Fourier de g.
   (c) En déduire l'inégalité de Poincaré : $\int_0^\pi f(x)^2 dx \leq \int_0^\pi f'(x)^2 dx$.
2. Dans le cas a, b quelconques, déterminer une constante C ne dépendant que de a et b telle que

$$\int_a^b f(x)^2 dx \leq C \int_a^b f'(x)^2 dx$$

Exercice 10. On fixe une fonction $u_0 \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et 2π-périodique. On considère l'*équation de la chaleur*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} &= \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{pour } t > 0 \text{ , } x \in \mathbf{R} \\ u(0, x) &= u_0(x) \quad \text{pour } x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

Notre but est de montrer que cette équation admet une unique solution continue sur $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}^+_* \times \mathbf{R}$ et 2π-périodique par rapport à x.

1. Supposons que u soit une telle solution.
   (a) Montrer les identités suivantes :
      - $\forall t \geq 0 \ \forall x \in \mathbf{R} \quad u(t, x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n(t) e^{inx}$, où $c_n(t) = \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t, x) e^{-inx} dx$.
      - $\forall t > 0 \ \forall x \in \mathbf{R} \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n'(t) e^{inx}$
      - $\forall t > 0 \ \forall x \in \mathbf{R} \quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n \in \mathbf{Z}} -n^2 c_n(t) e^{inx}$
   (b) Montrer que pour tout $t > 0$ et tout $n \in \mathbf{Z}$ on a $c_n'(t) = -n^2 c_n(t)$.
   (c) Montrer que pour tout $t \geq 0$ et tout $x \in \mathbf{R}$ on a $c_n(t) = c_n(0) e^{-n^2 t}$.
2. Établir le résultat énoncé au début de l'exercice, et montrer que la solution u est en fait de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 11. Soit f une fonction 2π-périodique.

1. On suppose que f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que f' est continue sur $]0, 2\pi[$ et continue par morceaux. Montrer que la série de Fourier de f' s'obtient en dérivant terme à terme la série de Fourier de f.
2. Étudier le cas de la fonction 2π-périodique f telle que $f(x) = x$ sur $[0, 2\pi[$.

Exercice 12. Soit $\delta \in]0, \pi]$.

1. En considérant f 2π-périodique définie par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq \delta \\ 0 & \text{si } \delta < |x| \leq \pi \end{cases}$, montrer l'identité

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\delta)}{n} = \frac{\pi - \delta}{2}$$

2. À l'aide de l'identité de Parseval, établir que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\delta)}{n^2\delta} = \frac{\pi-\delta}{2}$.
3. En faisant tendre δ vers 0, prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 13. Soit $(B_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de polynômes définie par $B_0 = 1$ et, pour $n > 0$,

$$B_n' = nB_{n-1} \ , \quad \int_0^1 B_n(t)dt = 0$$

On note b_n le *nombre de Bernoulli* $B_n(0)$. Pour tout entier n on note A_n la fonction 2π-périodique égale à $B_n\left(\frac{x}{2\pi}\right)$ sur $[0, 2\pi]$.

1. Montrer que A_n est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux pour tout $n \in \mathbf{N}$; pour quels n A_n est-elle continue ?
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{Z}^*$ et tout $n > 0$ on a $c_k(A_n) = -\dfrac{n!}{(2\pi \mathrm{i} k)^n}$.
3. À l'aide de la série de Fourier de A_{2p}, montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}^*$ on a

$$\zeta(2p) = (-1)^{p+1}\frac{(2\pi)^{2p}}{2(2p)!}b_{2p}$$

(on rappelle que pour tout $s > 1$ on a $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^s}$).

4. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$.

Exercice 14. Soit $\lambda \in \mathbf{C} \setminus [-1, 1]$. On définit $f \colon \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ en posant pour tout $x \in \mathbf{R}$ $f(x) = \dfrac{1}{\lambda + \cos(x)}$.

1. Montrer que l'équation $P(z) = z^2 + 2\lambda z + 1$ a deux solutions z_1, z_2 telles que $0 < |z_1| < 1 < |z_2|$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$ on a $f(x) = \dfrac{2e^{\mathrm{i}x}}{P(e^{\mathrm{i}x})}$.
3. Donner le développement en série entière de la fonction f (on pourra commencer par développer $\dfrac{1}{P}$ en éléments simples, puis utiliser un développement en série entière bien choisi).
4. En déduire les valeurs des intégrales $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{\lambda + \cos(x)}dx$ pour tout entier $n \geq 0$.

Exercice 15.

1. Soit h une fonction mesurable sur $[-\pi, \pi]$. On suppose que $\displaystyle\int_{[-\pi,\pi]} \left|\frac{h(t)}{t}\right| dt < +\infty$.
   (a) Pour $n, m \in \mathbf{Z}$ on considère $s_{m,,n} = \displaystyle\sum_{k=m}^{n} c_k(h)$, et $g \colon t \mapsto \dfrac{h(t)}{e^{\mathrm{i}t} - 1}$. Montrer que g est intégrable sur $[-\pi, \pi]$ et que $s_{m,n} = c_{m-1}(g) - c_n(g)$

(b) Montrer que la série de Fourier de h converge vers 0 en 0.

2. Soit f une fonction 2π-périodique et mesurable, $x \in \mathbf{R}$ et $l \in \mathbf{C}$ tels que

$$\int_{[-\pi,\pi]} \left| \frac{f(x+t)-l}{t} \right| dt < +\infty$$

À l'aide du résultat de la question précédente, montrer que $\sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n(f) e^{inx} = l$.

3. Montrer que si f est intégrable sur $[-\pi, \pi]$, définie partout et dérivable en x, alors la série de Fourier de f converge en x vers $f(x)$.
4. On fixe $\alpha \in]0,1]$. Soit f une fonction 2π-périodique et α-hölderienne, c'est-à-dire qu'il existe M tel que pour tout t, s on a $|f(t) - f(s)| \leq M|t-s|^\alpha$. Montrer que la série de Fourier de f converge simplement vers f sur $\mathbf{R}$.

Exercice 16. Soit f une fonction continue, 2π-périodique. On suppose que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $\|S_n(f)\|_\infty \leq 1$. Montrer que $\|f\|_\infty \leq 1$.

Exercice 17. On note E l'espace des fonctions continues, 2π-périodiques, à valeurs dans $\mathbf{C}$. On rappelle que le *noyau de Dirichlet* est donné par la formule

$$D_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} e^{\mathrm{i}kt} = \frac{\sin\left((N+\frac{1}{2})t\right)}{\sin(\frac{t}{2})}$$

et que la valeur en $x \in \mathbf{R}$ de la N-ième somme partielle de la série de Fourier (complexe) de $f \in E$ est donnée par la formule

$$S_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x-t) dt$$

1. Montrer que $\lim_{N \to +\infty} \|D_N\|_1 = +\infty$.
2. Pour $N \in \mathbf{N}$, on considère l'application linéaire $\varphi_N \colon E \to \mathbf{C}$ définie par $\varphi_N(f) = \sum_{k=-N}^{N} c_k(f)$. Montrer que pour tout $f \in E$ on a $|\varphi_N(f)| \leq \|D_N\|_1 \|f\|_\infty$.
3. En considérant, pour $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbf{N}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{D_N(t)}{|D_N(t)| + \varepsilon}$, montrer que la norme subordonnée de $\varphi_N \colon (E, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbf{C}, |\cdot|)$ est égale à $\|D_N\|_1$.
4. Conclure, en utilisant le théorème de Banach-Steinhaus, qu'il existe des fonctions continues dont la série de Fourier ne converge pas en 0.

Remarque. Si (E, d) est un espace métrique complet, disons qu'une partie A de E est *comaigre* si A contient une intersection dénombrable d'ouverts dense (le théorème de Baire affirme qu'alors A est dense). L'argument ci-dessus montre que, pour tout x, l'ensemble des fonctions f tels que la série de Fourier de f diverge en x est comaigre dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$. Il suit de ce résultat et du *théorème de Kuratowski-Ulam* que, pour un ensemble comaigre de fonctions $f \in E$, la série de Fourier de f diverge en tout point x d'un ensemble comaigre Ω_f de $\mathbf{R}$. Pourtant, pour toute fonction L^2, la série de Fourier de f converge presque partout vers f (Carleson 1966 ; ce résultat est en fait vrai pour tout L^p, $p > 1$, et faux sur L^1). La question de la convergence des séries de Fourier est subtile...