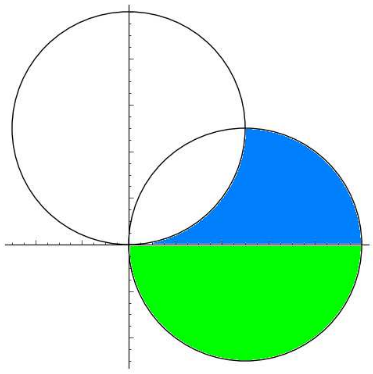
Le domaine d'intégration B est donné par les conditions $x^2+y^2 \leq x$, $x^2+y^2 \geq y$. Ces deux conditions se réécrivent comme

$$(x-\frac{1}{2})^2+y^2 \leq \frac{1}{4}, \quad x^2+(y-\frac{1}{2})^2 \geq \frac{1}{4} \ .$$

Autrement dit, le domaine d'intégration est formé du disque de centre $(\frac{1}{2},0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ privé de son intersection avec le disque de centre $(0,1)$ et de rayon $\frac{1}{2}$, représenté ci-dessous (l'explication pour les deux différentes couleurs se trouve plus bas).



Pour calculer l'intégrale sur B de x^2+y^2, on passe en coordonnées polaires; les conditions sur r,θ sont : $r \geq 0$ (à ne jamais oublier!!), $r^2 \leq r\cos(\theta)$ et $r^2 \geq r\sin(\theta)$, i.e. $r \leq \cos(\theta)$, $r \geq \sin(\theta)$. On voit que si $\cos(\theta)$ est négatif il n'y a pas de point d'argument θ appartenant à B (sur le dessin : le disque de centre $(\frac{1}{2},0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ est entièrement situé à droite de l'axe des ordonnées). De plus, pour qu'un point d'argument θ puisse appartenir à B, il faut que $\sin(\theta) \leq \cos(\theta)$, donc ce n'est finalement possible que si $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$.
A θ fixé, dans quel domaine doit varier r ? Etant données les conditions qu'on a écrites, on voit que :

- Si θ est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et 0 (partie du domaine où $\sin(\theta)$ est négatif) alors r varie entre 0 et $\cos(\theta)$ (c'est la partie en vert sur le dessin).
- Si θ est compris entre 0 et $\frac{\pi}{4}$ (partie du domaine où $\sin(\theta)$ est positif) alors r varie entre $\sin(\theta)$ et $\cos(\theta)$ (c'est la partie en bleu).

Finalement, on obtient que :

$$\begin{aligned}
\iint_B (x^2+y^2)\,dxdy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left(\int_0^{\cos(\theta)} r^2 \cdot r dr \right) d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_{\sin(\theta)}^{\cos(\theta)} r^2 \cdot r dr \right) d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\cos^4(\theta)}{4}\, d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^4(\theta)-\sin^4(\theta)}{4}\, d\theta
\end{aligned}$$

L'intégrande de droite se linéarise facilement : on a

$$\cos^4(\theta)-\sin^4(\theta) = (\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta))(\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)) = \cos^2(\theta)-\sin^2(\theta) = \cos(2\theta) \ .$$

Pour l'intégrale de gauche, hélas, il faut utiliser la formule d'Euler, et on a

$$\cos^4(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^4 = \frac{(e^{4i\theta}+e^{-4i\theta})+4(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta})+6}{16} = \frac{\cos(4\theta)}{8} + \frac{\cos(2\theta)}{2} + \frac{3}{8} \ .$$

Ceci nous donne finalement

$$\begin{aligned}
\iint_B (x^2+y^2)\,dxdy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left(\frac{\cos(4\theta)}{32} + \frac{\cos(2\theta)}{8} + \frac{3}{32} \right) d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2\theta)}{4}\, d\theta \\
&= 0 + 0 + \frac{3\pi}{64} + \frac{1}{8} \\
&= \frac{3\pi+8}{64} \ .
\end{aligned}$$

(Ce n'est pas le résultat qui avait été obtenu à la fin du TD, mais c'est peut-être plutôt bon signe...)