Université Claude Bernard — Mathématiques
L3 Calcul intégral

Révisions

Quelques corrections d'exercices des dernières feuilles de TD.

Exercice 6 feuille 8

Soit λ_2 la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^2$. Soit $0 \leqslant a < b$. On pose

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \text{ t.q. } 0 < x < y < \sqrt{x^2 + 1} \text{ et } a < xy < b\}.$$

(a) Montrer que D est un borélien.

(b) A l'aide du changement de variables $\begin{cases} u = y^2 - x^2 \\ v = xy \end{cases}$, que l'on justifiera, calculer l'intégrale $I = \int_D (y^2 - x^2)^{xy}(x^2 + y^2)d\lambda_2(x, y)$ en fonction de a et b.

Correction.

(a) Posons $D_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \colon 0 < x\}$; $D_1 =]0, +\infty[\times\mathbf{R}$ donc D_1 est borélien puisque c'est un produit d'intervalles.
Posons ensuite $D_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \colon x < y\}$; si on note $f(x, y) = y - x$ alors f est continue sur $\mathbf{R}^2$ et on a $D_2 = f^{-1}(]0, +\infty[)$ donc D_2 est ouvert, et par conséquent borélien.
En utilisant la fonction (continue) $g(x, y) = \sqrt{x^2 + 1} - y$ on montre de même que $D_3 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \colon y < \sqrt{x^2 + 1}\} = g^{-1}(]0, +\infty[)$ est ouvert donc borélien.
Enfin, en utilisant la fonction continue $h(x, y) = xy$ on voit que $D_4 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \colon a < xy < b\} = h^{-1}(]a, b[)$ est ouvert donc borélien.
Par définition, on a $D = D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4$, donc D est borélien en tant qu'intersection finie de boréliens (en fait, D est une intersection finie d'ouverts, donc D est ouvert).

(b) Considérons la fonction $\varphi \colon D \to \mathbf{R}^2$ définie sur l'ouvert D [1] par $\varphi(x, y) = (y^2 - x^2, xy)$. Pour vérifier les hypothèses du théorème de changement de variables, il faut vérifier que φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de D sur $\varphi(D)$.
Commençons par noter qu'on a $\varphi(D) = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 \colon 0 < u < 1 \text{ et } a < v < b\}$, qui est un ouvert ; ensuite considérons la matrice jacobienne $J_\varphi(x, y)$ de φ en un point (x, y) : celle-ci vaut

$$\begin{pmatrix} -2x & 2y \\ y & x \end{pmatrix}$$

Toutes les dérivées partielles existent et sont continues, donc φ est de classe $\mathcal{C}^1$; notons tout de suite que le déterminant de la matric jacobienne de φ en un point (x, y) vaut $-2(x^2 + y^2)$. Le fait que le terme $x^2 + y^2$ apparaisse dans l'intégrale qu'on doit calculer est donc un bon signe...
Pour vérifier que φ est un difféomorphisme, il nous reste à vérifier que φ est une bijection de D sur $\varphi(D)$. Pour cela, une méthode est de prouver que φ admet une fonction inverse ; il s'agit donc, à $(u, v) \in \varphi(D)$ fixé, de prouver qui'l existe un unique couple $(x, y) \in D$ qui soit solution de l'équation $\varphi(x, y) = (u, v)$.
Fixons donc $(u, v) \in D$; on doit résoudre le système

$$\begin{cases} u = y^2 - x^2 \\ v = xy \end{cases}$$

De la deuxième ligne on tire $y = \dfrac{v}{x}$, qu'on substitue dans la première ligne pour trouver que $x^4 + x^2u - v^2 = 0$. Ceci est une équation du second degré en x^2, qui pour $(u, v) \in \varphi(D)$ a pour

[1] remarque : ici j'utilise le fait que φ est ouvert ; si on a simplement montré que D est borélien il faut considérer la fonction φ définie sur un ouvert qui contient D, par ex. $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

unique solution positive $x^2 = \dfrac{-u+\sqrt{u^2+4v^2}}{2}$. Un couple (x,y) satisfait donc $\varphi(x,y)=(u,v)$ si, et seulement si,

$$x = \sqrt{\frac{-u+\sqrt{u^2+4v^2}}{2}} \text{ et } y = v\sqrt{\frac{2}{-u+\sqrt{u^2+4v^2}}}$$

Ceci permet de vérifier que φ a un inverse, donc toutes les conditions pour appliquer le théorème de changement de variables sont réunies.
Définissons sur $\varphi(D)$ une fonction f en posant $f(u,v)=u^v$. Cette fonction est continue sur $\varphi(D)$, à valeurs positives, et on a

$$\int_D (y^2-x^2)^{xy}(x^2+y^2)d\lambda_2(x,y) = \frac{1}{2}\int_D f(\varphi(x,y))|\det(J_\varphi(x,y))|d\lambda_2(x,y) = \frac{1}{2}\int_{\varphi(D)} f(u,v)d\lambda_2(u,v)\ .$$

(La dernière égalité est une conséquence du théorème de changement de variables appliqué à la fonction f et au difféomorphisme φ).
Finalement, on voit à l'aide du théorème de Tonelli que l'intégrale I qu'on cherche à calculer dans cet exercice vaut

$$I = \frac{1}{2}\int_{v=a}^{b}\Big(\int_{u=0}^{1} u^v du\Big)dv = \int_{v=a}^{b}\frac{dv}{v+1} = \ln\Big(\frac{b+1}{a+1}\Big)\ . \quad \square$$

Exercice 7 feuille 8. En utilisant un changement de variables, calculer le volume de $A=\{(x,y,z)\in[0,1]^3 \colon z\geq 4xy\}$.

Correction. La mesure de Lebesgue dans $\mathbf{R}^3$ est une formalisation très générale de la notion intuitive de volume. Calculer le volume d'une partie A borélienne de $\mathbf{R}^3$, c'est calculer sa mesure de Lebesgue, c'est-à-dire intégrer sa fonction caractéristique. On doit donc calculer $\int_A 1d\lambda_3(x,y,z)$. Pour nous simplifier la vie, remplaçons la partie A ci-dessus par $\tilde{A} = A\cap]0,1[^3$, qui a bien sûr le même volume mais rend la rédaction ci-dessous (justification du changement de variable) plus facile.
Utilisons le changement de variables défini sur $]0,+\infty[^3$ par $\varphi(x,y,z)=(x,xy,z)$. Cette fonction a un inverse ψ défini sur $]0,+\infty[^3$ par $\psi(u,v,w)=(u,v/u,w)$. Donc ψ est une bijection de $]0,+\infty[^3$ sur $]0,+\infty[^3$, et on vérifie facilement que les dérivées partielles de ψ existent et sont continues, donc que ψ est de classe $\mathcal{C}^1$. Enfin, le déterminant jacobien de ψ est égal à $\dfrac{1}{u}$. Le théorème de changement de variables, appliqué à la fonction indicatrice de $\tilde{A}$ et au difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ ψ, donne

$$\int_{\tilde{A}} 1d\lambda_3(x,y,z) = \int_{\varphi(\tilde{A})} 1.\frac{1}{u}d\lambda_3(u,v,w)\ .$$

Il nous reste donc à déterminer $\varphi(\tilde{A})$; pour cela, remarquons déjà que la condition $0<x<1$ est équivalente à $0<u<1$, que la condition $0<y<1$ est elle équivalente à $0<v/u<1$, la condition $z<1$ est équivalente à $0<w<1$ et finalement la condition $z\geq 4xy$ est elle équivalente à $w\geq 4v$.
Ici il faut faire attention au fait que w doit être plus petit que 1 ! On est donc amené à séparer les cas $u\leq 1/4$ et $u>1/4$: à u fixé $\leq 1/4$, (v,w) doit vérifier $0<v<u$ et $4v\leq w<1$, alors qu'à u fixé $>1/4$ (v,w) doit vérifier $0<v\leq 1/4$ et $4v\leq w<1$. Finalement, on voit que le volume V de A est égal à

$$\int_{u=0}^{1/4}\left(\int_{v=0}^{u}\left(\int_{w=4v}^{1} dw\right)dv\right)\frac{du}{u} + \int_{u=1/4}^{1}\left(\int_{v=0}^{1/4}\left(\int_{w=4v}^{1} dw\right)dv\right)\frac{du}{u} = \frac{3+4\ln(2)}{16}\ .$$

(je n'ai pas eu le courage de taper le calcul des intégrales, qui est élémentaire ; avec un peu de chance le résultat en fin de ligne est correct...) $\square$

Exercice 10 feuille 8.
On rappelle qu'on note λ_2 la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^2$, et que la fonction "cosinus hyperbolique" est définie par $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x))$.

1) On se donne les trois intégrales

$$A = \int_{\mathbf{R}_+^2} \frac{d\lambda_2(s,t)}{\operatorname{ch} s + \operatorname{ch} t}, \quad B = \int_{\mathbf{R}^2} \frac{d\lambda_2(s,t)}{\operatorname{ch} s + \operatorname{ch} t}, \quad C = \int_{\mathbf{R}^2} \frac{d\lambda_2(u,v)}{\operatorname{ch} u \operatorname{ch} v}$$

(a) Vérifier que $B = 4A$ et $C = \pi^2$.

(b) En faisant le changement de variables $s = u - v, t = u + v$, prouver que $B = C$ et donner la valeur de A.

2) On considère la fonction $H : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ définie par

$$H(x) = \int_0^{+\infty} \exp(-x \operatorname{ch} t) dt.$$

(a) Démontrer que H est décroissante et continue sur $]0, +\infty[$. Déterminer les limites de $H(x)$ lorsque x tend vers 0 et lorsque x tend vers $+\infty$.

(b) Vérifier que $\displaystyle\int_0^{+\infty} H(x) dx = \frac{\pi}{2}$.

(c) En utilisant l'intégrale A de la partie 1, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} H(x)^2 dx = \frac{\pi^2}{4}$.

Correction.

1) (a) Appelons P_1 le quart de plan ouvert supérieur droit, P_2 le quart de plan ouvert supérieur gauche, P_3 le quart de plan ouvert inférieur gauche et P_4 le quart de plan ouvert inférieur droit. Définissons une fonction $f \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ par $f(s,t) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}(s) + \operatorname{ch}(t)}$. alors f est continue, à valeurs positives. De plus, la symétrie φ définie par $\varphi(s,t) = (-s,t)$ envoie P_2 sur P_1 ; c'est une aapplication linéaire inversible, de déterminant -1, le théorème de changement de variables permet donc d'écrire

$$\int_{P_1} f(s,t) d\lambda_2(s,t) = \int_{P_2} f(\varphi(s,t)).1 d\lambda_2(s,t) = \int_{P_2} f(s,t) d\lambda_2(s,t) \ .$$

La dernière égalité vient du fait que $f(\varphi(s,t)) = f(-s,t) = f(s,t)$ puisque la fonction ch est paire.
On vérifie de même, en utilisant les symétries $(x,y) \mapsto (-x,-y)$ et $(x,y) \mapsto (x,-y)$ que

$$\int_{P_1} f(s,t) d\lambda_2(s,t) = \int_{P_3} f(s,t) d\lambda_2(s,t) = \int_{P_4} f(s,t) d\lambda_2(s,t) \ .$$

Pour conclure, on peut remarquer que P_1, P_2, P_3, P_4 sont disjoints et que $\mathbf{R}^2 \setminus (P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4)$ est de mesure nulle ; par conséquent on a

$$\int_{\mathbf{R}^2} f(s,t) d\lambda_2(s,t) = \int_{P_1} f(s,t) d\lambda_2(s,t) + \int_{P_2} f(s,t) d\lambda_2(s,t) + \int_{P_3} f(s,t) d\lambda_2(s,t) + \int_{P_4} f(s,t) d\lambda_2(s,t) \ .$$

L'intégrale de gauche vaut C, celles de droite sont toutes égales à A ; par conséquent on vient de prouver que $C = 4A$.
Pour calculer C, on peut appliquer le théorème de Tonelli à la fonction borélienne positive $(u,v) \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}(u)\operatorname{ch}(v)}$; on obtient alors

$$C = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}(u)} du \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}(v)} dv \right) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}(x)} dx \right)^2 .$$

Pour calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\text{ch}(x)} dx$, on peut par exemple poser $u = \text{sh}(x)$ (c'est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$) et utiliser la relation $\text{ch}^2(x) = 1 + \text{sh}^2(x)$; on obtient[2] :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\text{ch}(x)} dx = \int_{u=-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \pi$$

On a donc bien $C = \pi^2$.

(b) Cette fois-ci, on va utiliser la formule de trigonométrie hyperbolique $\text{ch}(u+v) = \text{ch}(u)\,\text{ch}(v) + \text{sh}(u)\text{sh}(v)$ [3] dont on déduit que

$$\text{ch}(u+v) + \text{ch}(u-v) = 2\,\text{ch}(u)\,\text{ch}(v)$$

Le changement de variables $\varphi\colon s = u - v, t = u + v$ est un changement de variables linéaire, de déterminant 2 donc inversible ; en appliquant le théorème de changement de variables à φ et à la fonction borélienne à valeurs positives f, on obtient

$$\int_{\mathbf{R}^2} f(s,t) d\lambda_2(s,t) = \int_{\mathbf{R}^2} f(\varphi(s,t)).2d\lambda_2(s,t) = \int_{\mathbf{R}^2} \frac{2d\lambda_2(s,t)}{\text{ch}(u+v) + \text{ch}(u-v)} = \int_{\mathbf{R}^2} \frac{d\lambda_2(s,t)}{\text{ch}(u)\,\text{ch}(v)} \,.$$

On a finalement démontré que $B = C$, ce qui donne d'après la question précédente $A = \frac{\pi^2}{4}$.

2) (a) Remarquons tout de suite que la fonction $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par $f(x,t) = \exp(-x\,\text{ch}(t))$ est continue, ce qui implique en particulier qu'à t fixé la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue, et qu'à x fixé la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue donc mesurable. Notons aussi que f est à valeurs positives. Puisque $\text{ch}(t) > t$ pour tout t, on vérifie ensuite qu'à $x > 0$ fixé la fonction $t \mapsto \exp(-x\,\text{ch}(t))$ est intégrable.
Le fait que H est décroissante est clair : en effet, à $y > x > 0$ fixés, on a pour tout $t \geq 0$ que $\exp(-(y)\,\text{ch}(t)) \leq \exp(-x\,\text{ch}(t))$, ce qui s'intègre en $H(y) \leq H(x)$.
La continuité est moins facile à montrer, à cause d'un problème en 0 : quand x tend vers 0 et t reste fixé $f(x,t)$ tend vers 1, qui n'est bien sûr PAS intégrable sur $]0,+\infty[$...
Comme on veut simplement montrer que H est continue sur $]0,+\infty[$, on commence par se placer "loin" de 0 ; autrement dit, on fixe $a > 0$ et on considère H sur $]a,+\infty[= I_a$. Sur I_a on a $0 \leq f(x,t) \leq e^{-at}$, et $t \mapsto e^{-at}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. Donc (étant donné ce qu'on a déjà vérifié au début de la question) on peut appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètre et conclure que H est continue sur I_a. Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, on en conclut que H est continue sur $\cup_{a>0} I_a =]0,+\infty[$.
Pour déterminer la limite de $H(x)$ quand x tend vers 0, il suffit (puisque H est monotone) de trouver la limite de $H(\frac{1}{n})$. Pour cela, on peut appliquer le théorème de convergence monotone : en effet, pour tout t fixé > 0 la suite de fonctions $f_n(t) = e^{-\frac{t}{n}}$ est croissante et a pour limite 1. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \Big(\int_0^{+\infty} \exp(-\frac{\text{ch}(t)}{n}) dt \Big) = \int_0^{+\infty} \Big(\lim_{n\to+\infty} \exp(-\frac{\text{ch}(t)}{n}) \Big) dt = \int_0^{+\infty} 1 dt = +\infty \,.$$

Ceci permet d'obtenir $\lim_{x\to 0} H(x) = +\infty$.
En $+\infty$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée : soit (x_n) une suite tendant vers $+\infty$; on peut bien sûr supposer que $x_n \geq 1$ pour tout n. Alors on a pour tout $t > 0$ fixé que $\exp(-x_n\,\text{ch}(t))$ tend vers 0 et de plus $\exp(-x_n\,\text{ch}(t)) \leq \exp(-t)$ pour tout n. On en déduit $\lim_{x\to+\infty} H(x) = 0$.

[2] Remarque : si vous voulez éviter d'utiliser des formules de trigonométrie hyperbolique, vous pouvez vous ramener à une intégrale d'une expression ne comprenant que des e^x, intégrale qu'il suffit de calculer sur $[0,+\infty[$ par parité de la fonction ; le changement de variables $u = e^x$ permet alors de retrouver le résultat ci-dessus

[3] qui permet simplement d'éviter quelques calculs, l'exercice est tout à fait faisable sans cette formule.

(b) La fonction f est positive, borélienne ; en lui appliquant le théorème de Tonelli sur $]0,+\infty[^2$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} H(x)dx = \int_{t=0}^{+\infty} \big(\int_{x=0}^{+\infty} \exp(-x\,\mathrm{ch}(t))dx\big)dt = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{dt}{\mathrm{ch}(t)} = \frac{\pi}{2}\ .$$

(La dernière égalité vient du fait qu'on a déjà calculé cette intégrale à la question 1)

(c) On a pour tout x, par définition de H :

$$H(x)^2 = \big(\int_{s=0}^{+\infty} \exp(-x\,\mathrm{ch}(s))ds\big)\big(\int_{t=0}^{+\infty} \exp(-x\,\mathrm{ch}(t))dt\big)$$

Grâce au théorème de Tonelli ,appliqué cette fois à la fonction mesurable positive f définie par $f(x,t,s) = \exp(-x\,\mathrm{ch}(s))\exp(-x\,\mathrm{ch}(t))$, on déduit :

$$\int_{x=0}^{+\infty} H(x)^2 dx = \int_{(s,t)\in\mathbf{R}_+^2} \left(\int_{x=0}^{+\infty} \exp(-x(\mathrm{ch}(t)+\mathrm{ch}(s)))dx\right) d\lambda_2(s,t) = \int_{\mathbf{R}_+^2} \frac{d\lambda_2(s,t)}{\mathrm{ch}(s)+\mathrm{ch}(t)}$$

Finalement on a obtenu $\displaystyle\int_0^{+\infty} H(x)^2 dx = \frac{\pi^2}{4}$. □

Exercice 7 feuille 6.

On pose $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha x^2)}{1+x^2} dx$.

1) Montrer que $I(\alpha)$ est bien définie lorsque $\alpha \geqslant 0$.
2) Montrer que la fonction $I : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et exprimer $I'(\alpha)$, pour $\alpha > 0$, sous la forme d'une intégrale.
3) Montrer que I est continue en 0.

4a) Soit $\alpha > 0, \alpha \neq 1$. Décomposer la fraction rationnelle $\displaystyle\frac{x^2}{(1+x^2)(1+\alpha x^2)}$ en éléments simples.

4b) En déduire la valeur de $I'(\alpha)$ pour $\alpha > 0$.

4c) Calculer $I(\alpha)$ pour $\alpha \geqslant 0$.

Correction.

1) A $\alpha > 0$ fixé, la fonction $f_\alpha \colon x \mapsto \dfrac{\ln(1+\alpha x^2)}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbf{R}^+$ (donc borélienne) et à valeurs positives. De plus on a $f_\alpha(x) \sim_{+\infty} \dfrac{\ln(\alpha x^2)}{1+x^2} \sim_{+\infty} \dfrac{2\ln(x)}{1+x^2}$ Il est connu que la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{1+x^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ donc on voit que $I(\alpha)$ est bien définie pour tout $\alpha > 0$. En $\alpha > 0$, la fonction qu'on intègre est nulle ($\ln(1) = 0$) donc $I(0)$ est aussi bien définie et vaut 0.
2) On veut vérifier les hypothèses du théorème de dérivation des intégrales à paramètre ; on a vu à la question précédente que pour tout $\alpha > 0$ fixé la fonction $x \mapsto f_\alpha(x) = f(\alpha, x)$ est intégrable. Il nous reste à voir ce qui se passe à x fixé. L'exercice ne demande de montrer la dérivabilité que sur $]0,+\infty[$ donc on se doute qu'il y a un problème en 0 ; pour l'éviter on considère un $a > 0$ quelconque et on étudie I sur $]a,+\infty[= I_a$. On a

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} f(\alpha,x) = \frac{x^2}{(1+\alpha x^2)(1+x^2)}\ .$$

Cette fonction est continue sur I_a, et si $\alpha \in I_a$ on voit que

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial\alpha} f(\alpha,x) = \frac{x^2}{(1+\alpha x^2)(1+x^2)} \leq \frac{x^2}{(\alpha x^2)(1+x^2)} \leq \frac{1}{a(1+x^2)}\ .$$

Comme la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{a(1+x^2)}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ on voit que sur I_a toutes les hypothèses du théorème de dérivation des intégrales à paramètre sont vérifiées, et qu'on a donc

$$I'(\alpha) = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+\alpha x^2)(1+x^2)} \ .$$

Ceci est vrai pour tout $a > 0$; par conséquent I est dérivable sur $]0,+\infty[$ et la formule ci-dessus est vraie pour tout x dans cet intervalle.

3) Il s'agit de montrer que la limite de I en 0 existe et vaut $I(0) = 0$; pour cela on considère une suite (α_n) d'éléments de $]0,+\infty[$ qui tend vers 0, dont on peut supposer sans perte de généralité que $\alpha_n \leq 1$ pour tout n.
On a pour tout x fixé $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(1+\alpha_n x^2)}{1+x^2} = 0$, et de plus $\dfrac{\ln(1+\alpha_n x^2)}{1+x^2} \leq \dfrac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}$ pour tout n et tout x ; en appliquant le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $f_n : x \mapsto \dfrac{\ln(1+\alpha_n x^2)}{1+x^2}$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} I(\alpha_n) = 0$. Ceci étant vrai pour toute suite α_n tendant vers 0, on a bien obtenu

$$\lim_{x\to 0} I(\alpha) = 0 = I(0) \ .$$

4a) Pour $\alpha \neq 1$ [4] on sait, d'après le théorème de décomposition en éléments simples , qu'il existe des réels a, b, c, d tels que, pour tout $x \in \mathbf{C}$ [5] , on ait :

$$\frac{x^2}{(1+x^2)(1+\alpha x^2)} = \frac{ax+b}{1+x^2} + \frac{cx+d}{1+\alpha x^2} \ .$$

En multipliant les deux côtés de cette égalité par x^2+1 et en posant $x = i$, on obtient

$$a.i + b = \frac{-1}{1-\alpha}$$

On en déduit $a = 0$ et $b = \dfrac{1}{\alpha-1}$; de même, on trouve $c = 0$ et $d = \dfrac{1}{1-\alpha}$.

4b) On en déduit que, pour tout $\alpha \neq 1$, on a

$$I'(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\alpha-1}\left[\arctan(x) - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\arctan(\sqrt{\alpha}x)\right]_{x=0}^{+\infty} \ .$$

Ceci permet d'obtenir, pour tout $a \neq 1$, que $I'(\alpha) = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1-1/\sqrt{\alpha}}{\alpha-1} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{\alpha}(\sqrt{\alpha}+1)}$. Par continuité, cette formule est aussi vraie en $\alpha = 1$.

4c) Puisque $I(0) = 0$ on a

$$I(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\pi dt}{2\sqrt{t}(1+\sqrt{t})} = \int_0^{\sqrt{\alpha}} \frac{\pi du}{1+u} = \pi\ln(1+\sqrt{\alpha}) \ . \quad \square$$

[4] Pour $\alpha = 1$ la fraction rationnelle est déjà décomposée...

[5] Si F est une fraction rationnelle à coefficients réels, alors l'égalité associée à la décomposition en éléments simples de f sur le corps $\mathbf{R}$ est encore valide sur $\mathbf{C}$; attention, ce n'est en général pas la même chose que la décomposition en éléments simples de f vue comme fraction rationnelle sur $\mathbf{C}$, puisque sur $\mathbf{C}$ les polynômes irréductibles sont tous de degré 1 alors que sur $\mathbf{R}$ ils peuvent être de degré 2.

Exercice 2 feuille 7. Dans cet exercice, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini, et $f\colon X \to \mathbf{R}^+$ une fonction mesurable.

1. Montrer que $A = \{(x,t) \in X \times \mathbf{R}^+ \colon f(x) \geq t\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}^+)$.
2. En utilisant le théorème de Tonelli, prouver que

$$\int_X f d\mu = \int_0^{+\infty} \mu(\{x \in X \colon f(x) \geq t\}) dt$$

3. Soit maintenant $\varphi\colon \mathbf{R}^+$ une fonction croissante de classe $\mathcal{C}^1$ nulle en 0. En vous inspirant de la question précédente, et en utilisant le fait que $\varphi(x) = \int_0^x \varphi'(t)dt$, montrer que

$$\int_X \varphi \circ f d\mu = \int_0^{+\infty} \varphi'(t)\mu(\{x \in X \colon f(x) \geq t\}) dt$$

Correction.

1. L'application $F\colon (x,t) \mapsto (f(x), t)$ est une application mesurable de $(X \times \mathbf{R}^+, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}^+))$ dans $(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+, \mathcal{B}(\mathbf{R}^+) \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}^+))$ puisque les deux applications coordonnées de F sont mesurables. De plus l'ensemble $B = \{(s,t) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \colon s \geq t\}$ est fermé donc borélien. Par conséquent, $A = F^{-1}(B)$ appartient à $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}^+)$.

2. Dans la suite, on note g la fonction indicatrice de $\{(x,t) \colon f(x) \geq t\}$. Par définition de l'intégrale, on a, pour tout t fixé,

$$\mu(\{x \in X \colon f(x) \geq t\}) = \int_X g(x,t) d\mu(x) \ .$$

La fonction g est une fonction caractéristique d'ensemble mesurable, et μ et la mesure de Lebesgue sont toutes deux σ-finies ; on peut donc appliquer le théorèeme de Tonelli et obtenir

$$\int_0^{+\infty} \mu(\{x \in X \colon f(x) \geq t\}) dt = \int_0^{+\infty} \left(\int_X g(x,t) d\mu(x) \right) dt = \int_X \left(\int_0^{+\infty} g(x,t) dt \right) d\mu(x) \ .$$

A x fixé, la fonction $g(x,t)$ vaut 1 si $0 \leq t \leq f(x)$, et 0 sinon ; par conséquent $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x,t)dt = \int_0^{f(x)} dt = f(x)$.
On a donc bien prouvé que

$$\int_0^{+\infty} \mu(\{x \in X \colon f(x) \geq t\}) dt = \int_X f d\mu \ .$$

3. Pour une telle fonction φ, on a pour tout t que $\displaystyle\varphi(t) = \int_0^t \varphi'(t)dt$ puisque φ est nulle en 0 et continûment dérivable, donc pour tout $x \in X$ on a

$$\varphi \circ f(x) = \varphi(f(x)) = \int_0^{f(x)} \varphi'(t)dt = \int_{\mathbf{R}^+} \varphi'(t) g(x,t) dt \ .$$

(La fonction g est bien sûr la même qu'à la question précédente)
On applique cette fois Tonelli à la fonction mesurable et positive $(x,t) \mapsto \varphi'(t)g(x,t)$ pour obtenir que

$$\int_X \varphi \circ f d\mu = \int_{\mathbf{R}^+} \left(\int_X \varphi'(t) g(x,t) d\mu(x) \right) dt = \int_0^{+\infty} \varphi'(t)\mu(\{x \in X \colon f(x) \geq t\}) dt \ . \quad \square$$

Exercice 10 feuille 7.

1. Montrer que
$$J=\int_{[0,1]\times[0,1]}\frac{dxdy}{1-xy}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}.$$
(On pourra utiliser le développement en série entière de $\ln(1-t)$.)
2. Effectuer le changement de variables $x=u-v$ et $y=u+v$ et en déduire que
$$J=\int_Q\frac{2dudv}{1-u^2+v^2}$$
où Q est un quadrilatère du plan que l'on déterminera.
3. Effectuer le changement de variable $u=\cos t$ et en déduire que $J=\pi^2/6$.
(On rappelle que $\dfrac{1-\cos t}{\sin t}=\tan(t/2)$ et que $\arctan(z)+\arctan(1/z)=\pi/2$.)

Correction.

1. On sait que sur $]-1,1[$ on a
$$\frac{1}{1-u}=\sum_{n=0}^{\infty}u^n\ .$$
On a donc
$$J=\int_{[0,1]\times[0,1]}\frac{dxdy}{1-xy}=\int_{[0,1]\times[0,1]}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(xy)^n\right)dxdy\ .$$
Comme la série de fonctions boréliennes qui apparaît ci-dessus est de signe constant, on peut sans problème[6] échanger somme et intégrale pour obtenir
$$J=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{[0,1]\times[0,1]}(xy)^ndxdy=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$$
2. Le changement de variable proposé par l'énoncé est linéaire, inversible, de déterminant 2 ; le domaine pour u,v devient $0\le u+v\le 1$, $0\le u-v\le 1$.
Notons $Q=\{(u,v)\in\mathbf{R}^2\colon 0\le u+v\le 1 \text{ et } 0\le u-v\le 1\}$. Alors le théorème de changement de variables, appliqué à la fonction linéaire inversible $\varphi\colon(u,v)\mapsto(u+v,u-v)$ et à la fonction positive borélienne $(u,v)\mapsto\dfrac{1}{1-uv}$, permet d'obtenir :
$$J=\int_Q\frac{2dudv}{1-(u-v)(u+v)}=\int_Q\frac{2dudv}{1-u^2+v^2}.$$
3. En dessinant Q, on voit qu'on doit finalement calculer
$$J=\int_{u=0}^{1/2}\left(\int_{v=-u}^{u}\frac{2dv}{1-u^2+v^2}\right)du+\int_{u=1/2}^{1}\left(\int_{v=u-1}^{1-u}\frac{2du}{1-u^2+v^2}\right)dv=J_1+J_2\ .$$
En mettant en facteur $1-u^2$, on voit qu'à u fixé différent de 1 la fonction $\dfrac{1}{1-u^2+v^2}$ s'intègre en $\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\arctan(v\sqrt{1-u^2})$ Ceci permet d'obtenir
$$J_1=2\int_{u=0}^{1/2}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}2\arctan(u\sqrt{1-u^2})du\ .$$

[6]C'est le théorème de Tonelli appliqué à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^2$ et à la mesure de comptage sur $\mathbf{N}$, qui sont toutes deux σ-finies ; si vous voulez vous ramener à un échange série-intégrale "classique", calculez l'intégrale à x fixé (par exemple) puis utilisez l'indication de l'énoncé pour conclure.

En utilisant le changement de variables proposé par l'énoncé, et en utilisant les relations trigonométriques fournies :

$$J_1 = 2\int_{t=\pi/3}^{\pi/2} 2\arctan(\frac{1}{\tan(t)})dt = 2\int_{t=\pi/3}^{\pi/2} (\pi - 2t)dt = \frac{\pi^2}{18} \ .$$

De même on obtient

$$J_2 = 2\int_{t=0}^{\pi/3} 2\arctan(\frac{1-\cos(t)}{\sin(t)})dt = 2\int_{t=0}^{\pi/3} 2\arctan(\tan(t/2))dt = 2\int_{t=0}^{\pi/3} tdt = \frac{\pi^2}{9} \ .$$

Finalement, on obtient $J = J_1 + J_2 = \dfrac{\pi^2}{18} + \dfrac{\pi^2}{9} = \dfrac{\pi^2}{6}$.