

**Brefs rappels sur les développements limités.**

Le but est ici de rappeler, sans démonstrations, la définition d'un développement limité et les opérations qu'on peut faire sur les développements limités, ainsi que celles qu'on ne doit surtout pas faire. On va surtout s'intéresser aux fonctions définies sur un intervalle ouvert et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Dans la suite,  $I$  désignera toujours un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ , et  $x_0$  un élément de  $I$ .

**Définition 1.**

On écrit  $f(x) = o_{x_0}(g(x))$  pour dire que  $f(x)$  s'écrit sous la forme  $g(x)\varepsilon(x)$ , où  $\varepsilon$  est une fonction qui tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $x_0$ ; on dit que  $f$  est *négligeable devant  $g$*  au voisinage de  $x_0$ .

**Définition 2.**

On dit que  $f$  et  $g$  sont *équivalentes* en  $x_0$ , et on écrit  $f \sim_{x_0} g$ , si on a  $f(x) = m(x)g(x)$ , où  $m(x)$  est une fonction qui tend vers 1 quand  $x$  tend vers  $x_0$ ; c'est équivalent à dire que l'on peut écrire  $f = g + o(g)$ , ou encore  $g = f + o(f)$ .

Attention à ne pas écrire  $f \sim_{x_0} 0$ , qui n'est vrai que si  $f$  est nulle au voisinage de  $x_0$ ...

Il faut faire attention en manipulant les  $o$  et les équivalents; en particulier, on peut *multiplier* des équivalents (au même point!) mais on ne peut pas les *additionner*.

On a souvent besoin de trouver des équivalents simples pour déterminer si une série ou une intégrale converge; et pour cela on peut utiliser des *développements limités*.

**Définition 3.**

On dit que  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  admet un développement limité d'ordre  $n$  en  $x_0$  s'il existe un polynôme  $P$  de degré  $n$ , à coefficients réels, et une fonction  $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$  tels que :

$$\forall x \in I, f(x) = P(x - x_0) + (x - x_0)^n \varepsilon(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$$

Autrement dit, on a  $f(x) = P(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$ .

On dit alors que  $P$  est la *partie régulière* d'ordre  $n$  du développement limité, et  $f - P$  le *reste* d'ordre  $n$ .

Notons que la définition entraîne immédiatement que, si  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en  $x_0$ , de partie régulière  $P$ , et  $m \leq n$  est un entier, alors  $f$  admet aussi un développement limité à l'ordre  $m$  en  $x_0$ , dont la partie régulière est formée par les termes de  $P$  de degré inférieur ou égal à  $m$ .

On se contente souvent ci-dessous de traiter le cas des développements limités au voisinage de 0, puisqu'une simple translation permet de s'y ramener. Rappelons que, si  $0 \in I$  et si  $f$  admet un développement limité d'ordre  $n \geq 1$  en 0, alors  $f$  est dérivable en 0 (en fait, admettre un développement limité à l'ordre 1 en  $x_0$  est équivalent à être dérivable en  $x_0$ , comme on le vérifie facilement à partir des définitions). Par contre,  $f'$  n'est **pas continue** en 0 a priori (considérer par exemple  $x \mapsto x^2 \sin(1/x)$ ).

**Proposition 4.**

Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  admet un développement limité d'ordre  $n$  en 0, alors la partie régulière du développement limité est unique (donc le reste est unique également).

Si  $f$  est paire ( $f(x) = f(-x)$ ), alors le polynôme  $P$  est pair. Si  $f$  est impaire ( $f(x) = -f(-x)$ ) alors  $P$  est impair.

Maintenant que nous nous souvenons un peu mieux de ce qu'est un développement limité, il est temps d'énoncer les théorèmes qui permettent en pratique de calculer les D.Ls.

**Proposition 5.**

- Formule de Taylor-Lagrange :

Si  $f$  est  $n + 1$  fois dérivable sur  $I$ , alors  $f$  admet un développement limité d'ordre  $n$  en 0, de partie régulière

$$P(X) = f(0) + f'(0)X + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} X^n$$

et de reste  $f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$  pour un certain  $c$  compris entre 0 et  $x$ . (bien sûr  $c$  dépend de  $x$ )

- Formule de Taylor-Young : Si  $f^{(n)}(0)$  existe, alors  $f$  admet un développement limité d'ordre  $n$  en 0 de partie régulière

$$P(X) = f(0) + f'(0)X + \dots + \frac{f^{(n)}(0)X^n}{n!}$$

Remarquez que la deuxième formule a des hypothèses plus faibles, et donne un résultat plus faible aussi puisqu'elle ne permet pas d'évaluer le reste. Les deux formules montrent que, pour calculer le développement limité d'une fonction  $f$  à l'ordre  $n$  en  $0$ , on peut se contenter de calculer les  $n$  dérivées successives  $f', f'', \dots, f^{(n)}$  et ensuite utiliser leur valeur en  $0$ ; en pratique, c'est une très mauvaise méthode dès que  $n$  dépasse 2 ou 3, car très lourde en calculs (le problème est qu'on détermine toutes les fonctions dérivées alors que ce n'est que leur valeur en  $0$  qui nous intéresse..).

On peut sans (trop) risquer de se tromper ajouter, multiplier des développements limités :

**Proposition 6.**

Si  $f, g$  admettent des développements limités à l'ordre  $n$  en  $0$ , de parties régulières respectives  $P$  et  $Q$ , alors :

- $\lambda f + \mu g$  admet un développement limité d'ordre  $n$  en  $0$ , de partie régulière  $\lambda P + \mu Q$
- $f.g$  admet un développement limité d'ordre  $n$  en  $0$ , de partie régulière les termes de degré  $\leq n$  de  $P.Q$ .

Pour calculer le développement limité de  $\frac{f}{g}$  dans le cas où  $g(0) \neq 0$ , on peut également diviser des développements limités selon la méthode des puissances croissantes (voir exemple du DL de  $\tan$  à la fin de la fiche).

Rappelons un résultat très important : on peut intégrer un développement limité, mais **on ne peut pas dériver un développement limité** en général : il se peut que  $f$  admette un développement limité d'ordre  $n$ , et que  $f'$  n'ait pas de développement limité d'ordre  $n - 1$ .

**Proposition 7.**

Si  $f$  est dérivable et  $f'$  admet un développement limité d'ordre  $n$  en  $0$  de partie régulière  $a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$ , alors  $f$  admet un D.L d'ordre  $n + 1$  en  $0$ , de partie régulière  $P(X) = f(0) + a_0 X + \frac{a_1}{2} X^2 + \dots + \frac{a_n}{n+1} X^{n+1}$ .

Remarquons que, dans l'énoncé ci-dessus, il est primordial de ne pas oublier le terme  $\ll f(x_0) \gg$ , qui est la constante d'intégration !

Il ne reste plus qu'un théorème important à énoncer sur les développements limités : on peut *composer* des développements limités.

**Proposition 8.**

Si  $f$  admet un développement limité en  $x_0$  d'ordre  $n$  et de partie régulière  $P$ , et  $g$  admet un développement limité d'ordre  $n$  en  $f(x_0)$  de partie régulière  $Q$ , alors  $g \circ f$  admet un développement limité d'ordre  $n$  en  $x_0$ , de partie régulière constituée par les termes de degré  $\leq n$  de  $Q \circ P$ .

Il y a un piège : il faut veiller à bien utiliser le développement limité de  $g$  en  $f(x_0)$ , et pas en  $x_0$ ... Il faut aussi faire attention à composer des développements limités de même ordre : si on connaît par exemple le développement limité de  $f$  en  $x_0$  à l'ordre 3 en  $x_0$ , et le développement limité de  $g$  à l'ordre 42 en  $f(x_0)$ , on n'a assez d'information que pour calculer le développement limité de  $g \circ f$  à l'ordre 3 en  $x_0$ .

Ce théorème peut être utilisé pour calculer le développement limité d'un quotient  $\frac{f}{g}$ , où  $g(0) \neq 0$  : on commence par calculer le développement limité de  $\frac{1}{g}$  par composition, puis on le multiplie avec celui de  $f$ .

**Il est très important de se rappeler qu'un développement limité est une égalité mathématique, pas une identification magique** : il faut toujours indiquer le reste et savoir à quel ordre on calcule le développement.

Pour terminer ces notes, mentionnons le cas des fonctions d'une variable réelle à **valeurs complexes**. Tous les énoncés donnés plus haut restent corrects (en considérant des polynômes à coefficients complexes, bien sûr), sauf un : **la formule de Taylor-Lagrange est fautive pour les fonctions à valeurs complexes**.

En effet, la preuve de cette formule se base sur l'égalité des accroissements finis (qui est en fait la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1) et celle-ci est fautive pour les fonctions à valeurs complexes. Un exemple pour se convaincre : considérons la fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $f(t) = e^{it}$ . Alors  $f$  est de classe  $C^\infty$ , et  $f'(t) = ie^{it}$  ne s'annule jamais (le module de  $f'(t)$  vaut toujours 1). On a  $f(2\pi) - f(0) = 0$ , donc il est impossible qu'il existe  $c$  tel que  $f(2\pi) - f(0) = 2\pi f'(c)$ . La raison de cette différence entre  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$  est que  $\mathbb{R}$  est muni d'un ordre naturel, compatible avec les opérations algébriques (tout particulièrement, un nombre est positif ssi c'est un carré); de plus cet ordre a de nombreuses propriétés (borne sup, borne inf, archimédianité...). Sur  $\mathbb{C}$ , il n'existe pas de telle relation d'ordre.

Tout cela ne pose pas de problème particulier : sur  $\mathbb{C}$ , on peut toujours utiliser la formule de Taylor-Young, ainsi que la formule de Taylor avec reste intégral, qu'on reverra plus tard (et qui est à connaître pour les écrits du CAPES!). La théorie serait par contre totalement différente si on considérait des dérivées de fonctions de variable complexe à valeurs complexes - c'est la théorie des fonctions holomorphes.

**Quelques développements importants :**

- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$ .

- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$ .
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$ .
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$ .
- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$ .
- $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$ .
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dots + \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1) \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$  (valable pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ ).

### Un exemple : trois méthodes pour calculer le développement limité de $\tan$ en 0 à l'ordre 5.

*Première méthode* : la division selon les puissances croissantes.

On commence par écrire

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)}.$$

Puis on utilise la méthode des puissances croissantes :

$$\begin{array}{r|l} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \\ - x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{24} + o(x^5) & \hline \hline & x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 \\ \hline & \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + o(x^5) \\ & - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{6} + o(x^5) \\ \hline & \frac{2}{15}x^5 + o(x^5) \end{array}$$

On obtient donc finalement que  $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$ .

*Deuxième méthode* : par composition, en utilisant le développement limité de  $\frac{1}{1-u}$  (ci-dessous, les termes en gris clair sont ceux qu'on aurait pu se passer d'écrire, puisqu'ils font apparaître des termes de degré  $> 5$ ).

$$\begin{aligned} \tan(x) &= \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)} \\ &= \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{1 - (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}) + o(x^5)} \\ &= (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}) (1 + (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}) + (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24})^2 + (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24})^3 + (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24})^4 + (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24})^5) + o(x^5) \\ &= (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}) (1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24}) + o(x^5) \\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5). \end{aligned}$$

(Note : dans la dernière ligne, on n'a pas fait apparaître les termes de degré  $> 5$ , puisque ce sont tous des  $o(x^5)$ )

*Troisième méthode* : en utilisant une équation différentielle. On a  $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$ . En écrivant le développement de  $\tan'$  en 0 à l'ordre 4 sous la forme  $a + bx^2 + cx^4 + o(x^4)$  (il n'y a pas de termes d'ordre impair :  $\tan$  est impaire, donc  $\tan'$  est paire), le fait que  $\tan(0) = 0$  et le théorème d'intégration des développements limités nous donne que le développement limité de  $\tan$  en 0 à l'ordre 5 est égal à  $ax + b\frac{x^3}{3} + c\frac{x^5}{5}$ . La formule  $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$  nous donne alors (par composition) :

$$a + bx^2 + cx^4 + o(x^4) = 1 + (ax + b\frac{x^3}{3} + c\frac{x^5}{5})^2 + o(x^4).$$

Autrement dit, on a

$$a + bx^2 + cx^4 + o(x^4) = 1 + a^2x^2 + \frac{2ab}{3}x^4 + \frac{b^2}{9}x^6 + o(x^4)$$

Le théorème d'unicité des développements limités nous permet d'identifier les deux développements terme à terme : ceci donne  $a = 1$ ,  $b = a^2 = 1$ , et  $c = \frac{2ab}{3} = \frac{2}{3}$ . En reportant cela dans la formule donnant le développement de  $\tan$  à l'ordre 5 en 0 en fonction de  $a, b, c$ , on obtient de nouveau  $\tan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$ .