Feuille 6

Exercice 1 (Quelques généralités sur les équivalences et extensions élémentaires.)
I. Montrer que deux structures de même signature peuvent être élémentairement équivalentes sans être ∞-équivalentes.

II. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes pour une structure $\mathcal{N}$ et une sous-structure $\mathcal{M}$ de $\mathcal{N}$:

1. $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$;
2. $\mathrm{Th}(\mathcal{M}, M) = \mathrm{Th}(\mathcal{N}, M)$;
3. l'inclusion de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$ est un plongement élémentaire.

III. Soient $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{M}_3$. Montrer les énoncés suivants :

1. Si $\mathcal{M}_1 \preceq \mathcal{M}_2$ et $\mathcal{M}_2 \preceq \mathcal{M}_3$, alors $\mathcal{M}_1 \preceq \mathcal{M}_3$.
2. Si $\mathcal{M}_1 \preceq \mathcal{M}_3$ et $\mathcal{M}_2 \preceq \mathcal{M}_3$, alors $\mathcal{M}_1 \preceq \mathcal{M}_2$.

Exercice 2 (Relations d'équivalences.) Soit $\mathcal{L} = \{E\}$ où E est un symbole de relation binaire.

1. Donner dans $\mathcal{L}$ une axiomatisation de la théorie qui énonce que E est une relation d'équivalence à exactement deux classes, toutes les deux infinies. Montrer que cette théorie est complète.
2. Même question pour le cas où E est une relation d'équivalence à une infinité de classes toutes infinies.

Exercice 3 (Une infinité de relations d'équivalences.) On pose $\mathcal{L} = \{E_i | i < \omega\}$ où chaque E_i est un symbole de relation binaire.

1. Écrire les énoncés qui disent que pour tout $i < \omega$, E_i est une relation d'équivalence, que E_0 n'a qu'une seule classe d'équivalence, et que pour tout $i < \omega$, E_{i+1} partitionne chaque classe de E_i en exactement 2 classes infinies.
2. On définit $M_0 = \{f : \omega \longrightarrow \{0,1\} : f \text{ est constante à partir d'un certain rang}\}$. On munit cet ensemble de la $\mathcal{L}$-structure suivante :

$$\mathcal{M}_0 \models E_i(f,g) \text{ si et seulement si pour tout } j < i\ ,\quad f(j) = g(j)\quad .$$

   Montrer que $\mathcal{M}_0$ est un modèle des énoncés du premier point. On notera T la théorie formée par ces énoncés et leurs conséquences.
3. On appellera *riche* un modèle $\mathcal{M}$ de T si pour tout $a \in M$, il existe une infinité de $b \in M$ tels que $\mathcal{M} \models E_i(a,b)$ pour tout $i < \omega$. Montrer que deux modèles riches de T sont ∞-équivalents.
4. Montrer que tout modèle de T a une extension élémentaire riche de même cardinal. Conclure que T est une théorie complète.
5. La théorie T est-elle $\aleph_0$-catégorique ?

Exercice 4 (Ordres discrets sans extrémités.) Soient $\mathcal{L} = \{<\}$ où $<$ est un symbole de relation binaire. Dans ce langage, soit T la théorie qui énonce qu'elle est une relation d'ordre discret sans extrémités et qui est formé par les conséquences de ces énoncés.

1. Écrire les énoncés qui axiomatisent T.
2. Vérifier que tout ensemble de la forme $K \times \mathbb{Z}$ ordonné par l'ordre lexicographique avec priorité sur la première coordonnée, où K est une chaîne dense sans extrémités et $\mathbb{Z}$ est muni de son ordre discret usuel, est modèle de T. Montrer que deux tels modèles sont ∞-équivalents.
3. Montrer que tout modèle de T a une extension élémentaire qui est de la forme décrite dans le point précédent. Déduire que T est une théorie complète.

Exercice 5 ($(\mathbb{Z}, +)$.) Dans cet exercice, nous reprenons la théorie de l'exercice 3 de la feuille 5. Le langage $\mathcal{L}$ est celui des groupes qu'on notera additivement. La théorie qu'on notera T contient les conséquences des énoncés du premier point de l'exercice 3 de la feuille 5.

1. Montrer que $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ n'est pas modèle de T.
2. Montrer que tout groupe de la forme $\hat{\mathbb{Z}} \oplus \oplus_{i<\kappa}(\mathbb{Q}, +)$ est modèle de T. Montrer que deux tels modèles avec κ infini sont ∞-équivalents.