Chapitre 2

Séries entières

2.1 Rappels sur $\limsup$ et $\liminf$

Exercice 2.1.1 *Dans cet exercice, (u_n) désigne une suite de réels.*

1. *Rappeler la définition de* $\limsup u_n$.
2. *Pour chacune des suites (u_n) suivantes, calculer sa* $\limsup$ *:*

$$\text{a)} \quad u_n = (-1)^n \ ; \quad \text{b)} \quad u_n = \begin{cases} \cos(n) & \textit{si } n \textit{ est pair} \\ 3^n & \textit{sinon} \end{cases} \ ; \quad \text{c)} \quad u_n = \frac{e^n}{n!}$$

   Dans les questions suivantes, on suppose que (u_n) est bornée.

3. *Montrer qu'il existe une sous-suite de (u_n) qui converge vers* $\limsup(u_n)$.
4. *Montrer que $L = \limsup u_n$ est caractérisée par la condition suivante :*

   Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble des n tels que $u_n \geq L + \varepsilon$ est fini, et l'ensemble des n tels que $u_n \geq L - \varepsilon$ est infini.
5. *Reprendre cet exercice avec la* $\liminf$.

Exercice 2.1.2

1. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites bornées de réels. Etablir les propositions suivantes :*

$$\limsup\,(u_n + v_n) \leq \limsup_{n\to\infty} u_n + \limsup v_n \ ;$$

$$(\forall n \geq n_0, u_n \leq v_n) \Rightarrow \limsup u_n \leq \limsup v_n.$$

   Donner un exemple de deux suites pour lesquelles la première inégalité est stricte.

2. *Reprendre la question précédente avec la* $\liminf$.

2.2 Disque de convergence et comportement au bord.

Exercice 2.2.1

1. *Soit* (u_n) *une suite de réels qui décroît vers* 0*, et* (v_n) *une suite de complexes telle que*
$$\exists M > 0 \quad \forall n \quad |\sum_{k=0}^{n} v_k| \leq M \ .$$
Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} u_n v_n$ *est convergente.*

2. *Application : soit* (u_n) *une suite de réels qui décroît vers* 0*, et* θ *un réel non multiple de* 2π*. Montrer que la série* $\sum_{n\geq 0} u_n e^{in\theta}$ *est convergente.*

Exercice 2.2.2 *Calculer le rayon de convergence des séries suivantes :*

$$\text{a)} \quad \sum_{n\geqslant 0} \frac{n^n}{n!} z^n \quad \text{b)} \quad \sum_{n\geqslant 0} n! z^n \quad \text{c)} \quad \sum_{n\geqslant 0} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$$
$$\text{d)} \quad \sum_{n\geqslant 0} n! z^{n^2} \quad \text{e)} \quad \sum_{n\geqslant 0} 2^n z^{n!}.$$

Montrer que la série c) *converge pour tout* z *tel que* $z \neq \frac{1}{4}$ *et* $|z| = \frac{1}{4}$.

Exercice 2.2.3 *Soit* $\theta \in [0, 2\pi]$.

a) *Montrer que si* $|z| < 1$*, la série* $S(z) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(n\theta)}{n} z^n$ *converge absolument.*

b) *Montrer que, pour* $z = 1$*, la série dérivée de* S *diverge. En déduire le rayon de convergence de* S.

c) *Montrer, sur cet exemple, qu'une série entière et sa série dérivée n'ont pas le même comportement sur le bord du disque de convergence.*

Exercice 2.2.4 *Calculer le rayon de convergence des séries suivantes et étudier la convergence de la série sur le bord du disque de convergence :*

$$\text{a)} \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n\sqrt{n}} \quad \text{b)} \quad \sum_{n\geqslant 2} \frac{z^n}{n(\ln n)^2} \quad \text{c)} \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{i\pi n^2/2}}{n} z^n.$$

Exercice 2.2.5

1. *Montrer que la fonction* $z \mapsto \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ *est définie et continue sur le disque unité fermé* $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| \leq 1\}$.

2. *Montrer que* f *n'est pas prolongeable par une fonction holomorphe en* 1 *(on montrera que la restriction de* f *à* $\mathbb{R}$ *n'a pas de dérivée à gauche en* 1*).*

Exercice 2.2.6

1. *Trouver le rayon de convergence de la série* $\sum a_n z^n$ *où* $a_{2n+1} = a^{2n+1}$ *et* $a_{2n} = b^{2n}$ *avec* $0 < a, b$.
2. *Pour la série* $\sum a_n z^n$, *où* $a_{2n} = a^n b^n$ *et* $a_{2n+1} = a^n b^{n+1}$ *avec* $a, b > 0$, *comparer l'inverse du rayon,* R^{-1}, *avec* $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Exercice 2.2.7

a) *Soit* $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $|z_0| = R$. *Montrer que si la série numérique* $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z_0^n$ *converge alors la série de fonctions* $z \longmapsto \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *converge uniformément sur le segment* $[0, z_0]$ *du plan complexe.*

b) **Application :** *on veut montrer que*

$$\log 2 = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1}. \tag{2.1}$$

(i) *Montrer que la série entière* $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$ *a pour rayon de convergence 1 et que pour tout* $t \in]-1, 1[$, $\log(1+t) = \sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1} t^{n+1}$.

(ii) *En utilisant* a), *en déduire la formule (2.1).*

2.3 Développement en série entière

Exercice 2.3.1 *Développer en série entière au voisinage de 0 les fonctions suivantes (on précisera le rayon de convergence) :*

a) $g(z) = \dfrac{2}{(1+z)^3}$.

b) $\frac{1}{1+z+z^2}$.

c) $\frac{z \sin a}{z^2 - 2(\cos a) z + 1}$ *(où* $a \in \mathbb{R}$*).*

d) $h(z) = e^{\frac{z}{\tan(\alpha)}} \cos(z)$, *où* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ *est fixé et* $\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$.

Exercice 2.3.2

1. *On considère la série entière* $\sum\limits_{n\geq 0} 2^n z^n$. *Calculer sa somme* f *dans son disque de convergence. Donner le développement en série de* f *au point* $z = -1/4$ *et le rayon de convergence de cette série.*
2. *De même, on considère la série entière* $S(z) = \sum\limits_{n\geq 0} n z^n$. *Calculer le rayon de convergence de cette série entière et expliciter* $S(z)$.

Exercice 2.3.3 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0\,. \end{cases}$$

a) *Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.*

b) *Montrer que f n'est pas développable en série entière au voisinage de 0 et n'est donc pas analytique en 0.*

2.4 Théorème de Liouville et formule de Parseval

Exercice 2.4.1 *Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Pour $|z| < R$, on pose $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$.*

a) *On fixe $r \in]0, R[$. Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, on a :*

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}\, d\theta.$$

b) *Pour $r \in]0, R[$, on pose $M(r) := \sup_{|z|=r} |f(z)|$. Justifier que $M(r) < +\infty$ et que, pour tout $n \geqslant 0$, on a $|a_n| \leqslant \dfrac{M(r)}{r^n}$.*

c) *On suppose que $R = +\infty$. Montrer que s'il existe deux constantes $A, B \in \mathbb{R}^+$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que : $|f(z)| \leqslant A + B|z|^k$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, alors f est un polynôme de degré inférieur ou égal à k. Comme cas particulier, en déduire le* **théorème de Liouville** *: toute fonction entière et bornée est constante.*

d) *On revient au cas général. Etablir la* **formule de Parseval** *:*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2\, d\theta = \sum_{n\geqslant 0} |a_n|^2 r^{2n}, \quad (r \in [0, R[).$$

e) *On suppose que f se prolonge en une fonction continue $\widetilde{f}$ sur le disque fermé $D(0, R]$.*

e.i) *Soit $\varphi : [0, R] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(r) := \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} |\widetilde{f}(re^{i\theta})|^2\, d\theta$. Montrer que φ est continue sur $[0, R]$.*

e.ii) *En déduire que la formule de Parseval reste valable en remplaçant f par $\widetilde{f}$ et r par R.*