

Chapitre 3

Fonctions classiques et logarithme complexe

3.1 Fonctions circulaires et hyperboliques

Exercice 3.1.1 a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\cos(iz) = \operatorname{ch}(z) ; \quad \operatorname{ch}(iz) = \cos(z) ; \quad \sin(iz) = i \operatorname{sh}(z) ; \quad \operatorname{sh}(iz) = i \sin(z) .$$

Déduire les parties réelles et imaginaires des fonctions \cos , \sin , ch et sh . Les fonctions \cos et \sin sont-elles bornées sur \mathbb{C} ?

b) Trouver les zéros des quatre fonctions \cos , \sin , ch et sh .

c) Donner le développement en série entière de \cos , \sin , ch et sh .

d) Résoudre les équations :

$$(i) \quad \sin(z) = \frac{5}{3} ; \quad (ii) \quad \operatorname{ch}(z) = \frac{1}{2} ; \quad (iii) \quad \cos(z) = 2 ; \quad (iv) \quad \sin z = \operatorname{ch} 4 .$$

Exercice 3.1.2 Soit $f : z \mapsto \sin(z)$ et $g : z \mapsto \cos(z)$.

1. Trouver l'image par f de la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$.
2. Trouver l'image par f de la droite d'équation $x = a$ où $0 < a < \frac{\pi}{2}$.
3. Trouver l'image par f du segment $\{-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}; y = 0\}$.
4. Trouver l'image par g du segment $\{0 < x < \pi; y = a\}$ avec $a > 0$.

Exercice 3.1.3 a) Quels sont les domaines de définition de \tan et de th ? Montrer que \tan est π -périodique et que th est $i\pi$ -périodique.

b) Montrer que $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$ et que $1 + \tan^2(z) = \frac{1}{\cos^2(z)}$ pour $z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

c) Montrer que $\operatorname{ch}^2(z) - \operatorname{sh}^2(z) = 1$ et que $1 - \operatorname{th}^2(z) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(z)}$ pour $z \neq i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$.

3.2 Le logarithme complexe

Exercice 3.2.1 Soit $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ et Log la détermination principale du logarithme.

1. A t-on $\text{Log}(e^z) = z$ pour tout $z \in (\exp)^{-1}(U)$? Sinon, déterminer un ouvert V de \mathbb{C} où cette égalité est vraie.
2. Soit $P^+ = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$. A t-on $\text{Log}(zz') = \text{Log}(z) + \text{Log}(z')$ pour tous $z, z' \in P^+$?
3. Même question en remplaçant P^+ par $\pi^+ = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$.
4. Pour $z \in U$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, on pose $z^{(\alpha)} = e^{\alpha \text{Log}(z)}$. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$ et $z \in U$ on a $z^{(n)} = z^n$.
5. On pose $z = e^{3i\pi/4}$. Comparer $(z^{(2)})^{(i)}$, $z^{(2i)}$ et $(z^{(i)})^{(2)}$.

Exercice 3.2.2 Soit U un ouvert connexe de \mathbb{C} et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe qui ne s'annule pas sur U .

1. Soit F une fonction continue de U dans \mathbb{C} . Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) F est une détermination sur U du logarithme de f , i.e

$$\forall z \in U \quad e^{F(z)} = f(z)$$

(b) F est holomorphe sur U , $F'(u) = \frac{f'(u)}{f(u)}$ pour tout $u \in U$ et il existe $u_0 \in U$ tel que $e^{F(u_0)} = f(u_0)$.

2. Soit F et G deux déterminations du logarithme de f dans U . Comparer F et G .
3. Soit U un ouvert connexe de \mathbb{C}^* contenant un cercle centré à l'origine. Montrer qu'il n'existe pas de détermination holomorphe du logarithme sur U .
4. Exprimer la somme de la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} z^n$ à l'aide de la détermination principale du logarithme.

5. Soit F une détermination du logarithme sur un ouvert connexe U de \mathbb{C}^* . Montrer que F est analytique sur U (on montrera que pour tout a dans U on a $F(z) = F(a) - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} (1 - \frac{z}{a})^n$ sur un voisinage de a).

Exercice 3.2.3 Soit U un ouvert de \mathbb{C} . On appelle *détermination holomorphe* sur U de la fonction arctangente toute fonction holomorphe f sur U , à valeurs dans $\mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ telle que $\tan(f(z)) = z$, ($z \in U$).

1. Montrer que s'il existe une détermination holomorphe sur U de la fonction arctangente, alors $-i \notin U$ et $i \notin U$.
2. Soit U un ouvert de \mathbb{C} ne contenant ni i , ni $-i$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
 - (i) f est une détermination holomorphe de la fonction arctangente sur U ,
 - (ii) $2if(z)$ est une détermination holomorphe sur U du logarithme de $\frac{1+iz}{1-iz}$.
3. Soit U un ouvert **connexe** de \mathbb{C} ne contenant ni i , ni $-i$. Supposons qu'il existe sur U une détermination holomorphe de la fonction arctangente. Expliciter toutes les déterminations holomorphes sur U de la fonction arctangente.
4. Soit $U = \mathbb{C} \setminus \{iy : |y| \geq 1\}$.
 - a) Construire sur U une détermination holomorphe f de la fonction arctangente.
 - b) Déterminer $f(U)$.
 - c) Donner pour $|z| < 1$, le développement en série entière de f .

Exercice 3.2.4 Soit f une fonction continue sur un ouvert U un ouvert de \mathbb{C} ne contenant pas -1 et 1 . On appelle *détermination holomorphe* sur U de la fonction arcsinus toute fonction holomorphe f sur U , à valeurs dans \mathbb{C} telle que $\sin(f(z)) = z$, ($z \in U$).

1. Montrer que s'il existe une détermination holomorphe sur U de la fonction arcsinus, alors $-1 \notin U$ et $1 \notin U$.
2. Soit U un ouvert de \mathbb{C} ne contenant ni 1 , ni -1 , et f une fonction holomorphe sur U . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
 - (i) f est une détermination holomorphe sur U de la fonction arcsinus,
 - (ii) il existe g continue sur U tel que $g(z)^2 = 1 - z^2$ et $e^{if(z)} = iz + g(z)$ pour tout $z \in U$.
3. Montrer que dans ce cas $f'(z) = \frac{1}{g(z)}$ pour tout $z \in U$.
4. Soit $U = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$. Montrer qu'il existe sur U une unique détermination holomorphe f de la fonction arcsinus telle que $f(0) = 0$.

3.3 Les fonctions puissances non entières

Exercice 3.3.1 (Racines carrées d'une fonction holomorphe) Notons U le plan complexe privé des deux demi-droites $[1, +\infty[$ et $]-\infty, -1]$ de l'axe réel.

- Montrer que l'image de U par la fonction $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^2 - 1$ est contenue dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$.
- On note Log une détermination du logarithme définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Montrer que la fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $z \mapsto e^{\frac{1}{2}\text{Log}(z^2-1)}$ est bien définie et holomorphe sur U . Calculer son carré et sa dérivée.
- Notons V le plan complexe privé du segment $[-1, 1]$. Vérifier que pour $z \in V$, on a $z^{-1} \in U$. On définit $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ en posant $g(z) = izf(z^{-1})$. Montrer que g est bien définie et holomorphe sur V . Calculer son carré et sa dérivée.

Exercice 3.3.2 (Racines p -ièmes) Soit U un ouvert de \mathbb{C} et p un entier, $p \geq 2$. On appelle détermination holomorphe de $z \mapsto z^{1/p}$ sur U toute fonction holomorphe $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ telle que pour tout $z \in U$ on ait $(f(z))^p = z$.

- Montrer que s'il existe une détermination holomorphe de $z \mapsto \log(z)$ sur U , alors il existe une détermination holomorphe de $z \mapsto z^{1/p}$ sur U .
- Soit f une détermination holomorphe de $z \mapsto z^{1/p}$ sur U . Montrer que pour tout $z \in U$ on a $f(z) \neq 0$. En déduire que $0 \notin U$.
- On suppose U connexe et on note f_1, f_2 deux déterminations holomorphes de $z \mapsto z^{1/p}$ sur U . Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $f_1 = \lambda f_2$.
- En déduire que s'il existe une détermination holomorphe de $z \mapsto z^{1/p}$ sur U , alors il en existe exactement p distinctes. Quelles sont-elles ?
- Montrer qu'il existe une unique détermination holomorphe f de $z \mapsto z^{1/3}$ sur $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ telle que $f(1) = e^{4i\pi/3}$. Calculer $f(i)$ et déterminer $f(U)$.

Exercice 3.3.3 Soit $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}^*$, $\alpha_j = \arg(a_j) \in [-\pi, \pi[$, $L_j = \{re^{i\alpha_j} : r \geq |a_j|\}$ et $U = \mathbb{C} \setminus \cup_{j=1}^m L_j$.

- Montrer qu'il existe f holomorphe sur U telle que $f(z)^2 = \prod_{j=1}^m (z - a_j)$ pour tout $z \in U$.
- Soit $U = \mathbb{C} \setminus (]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[)$. En utilisant la question 1., retrouver le résultat de l'exercice 3.3.1, à savoir qu'il existe sur U une détermination holomorphe de $(z^2 - 1)^{1/2}$.
- Même question en remplaçant U par $V = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.