

Chapitre 4

Intégration le long de chemins

4.1 Calculs explicites et majoration

Exercice 4.1.1 Soit γ le chemin qui représente le morceau de parabole d'équation $y = x^2$ joignant les points d'abscisse 1 et 2. Calculer

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz.$$

Exercice 4.1.2 Soit γ le circuit dont le support est le carré de sommets $1+i$, $1-i$, $-1-i$ et $-1+i$ parcouru une fois dans le sens direct. Calculer

$$\int_{\gamma} \frac{z-1}{z} dz.$$

Exercice 4.1.3 Soit γ le cercle unité parcouru dans le sens direct, et soit f une fonction continue définie sur le support de γ et à valeurs dans \mathbb{C} . Montrer que

$$\overline{\int_{\gamma} f(z) dz} = - \int_{\gamma} \frac{\overline{f(z)}}{z^2} dz.$$

Exercice 4.1.4 Soient $P = \{z : \Im(z) \geq 0\}$ et f continue sur P et à valeurs dans \mathbb{C} . On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, $M \in \mathbb{R}^+$ tels que :

$$|f(z)| \leq M|z|^n \text{ pour tout } z \in P.$$

Soit γ_R le demi-cercle de centre 0 et de rayon R contenu dans P . Montrer que

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) e^{iz} dz \right| \leq M\pi R^n.$$

4.2 Les lemmes de Jordan

Exercice 4.2.1 On fixe $r_0 \in \mathbb{R}^+$, $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 2\pi[$ avec $\alpha_1 < \alpha_2$.

1. Soit $\Delta_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq r_0, \arg(z) \in [\alpha_1, \alpha_2]\}$. Soit $f : \Delta_1 \rightarrow \mathbb{C}$ continue telle que $\lim_{z \rightarrow \infty} zf(z) = 0$ et soit $\gamma_r : [\alpha_1, \alpha_2] \rightarrow \mathbb{C}$ défini par $\gamma_r(\alpha) = re^{i\alpha}$.

Montrer que

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_r} f(z) dz = 0.$$

2. Soit $\Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \leq r_0, \arg(z) \in [\alpha_1, \alpha_2]\}$. Soit $g : \Delta_2 \rightarrow \mathbb{C}$ continue telle que $\lim_{z \rightarrow 0} zg(z) = 0$ et soit $\gamma_r : [\alpha_1, \alpha_2] \rightarrow \mathbb{C}$ défini par $\gamma_r(\alpha) = re^{i\alpha}$.

Montrer que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} g(z) dz = 0.$$

4.3 Application

Exercice 4.3.1 En intégrant $z \mapsto e^z$ le long d'un chemin convenable, montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ et pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(z) \geq 0$ on a :

$$|e^{bz} - e^{az}| \leq (b - a)|z|e^{b\Re(z)}.$$