Chapitre 5

Primitives et indices

5.1 Primitives

Exercice 5.1.1 *Soient U un domaine de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in U$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\frac{f'}{f}$ a une primitive dans U.*
2. *Il existe dans U une détermination holomorphe du logarithme de f.*

Dans ce cas, quelles sont toutes les déterminations holomorphes sur$U$ du logarithme de f ?

Exercice 5.1.2 *Soit γ le cercle centré en 2 et de rayon 1. Calculer $\int_\gamma \frac{z+1}{z} dz$ (sans expliciter l'intégrale curviligne et sans la théorie de l'indice).*

Exercice 5.1.3 *On fixe $a \in]0,1[$ et $r \in]0, 1-a[$. Soit γ le cercle de centre a et de rayon r. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1,1\}$, ondéfinit g par $g(z) = 2\frac{z-a}{z^2-1}$. Soit $\Gamma = g \circ \gamma$.*

1. *Montrer que Γ est un circuit tracé dans $\mathbb{C}^*$.*
2. *Calculer $\int_\Gamma \frac{dz}{z}$.*

Exercice 5.1.4 *Soit γ le cercle de centre 0 et de rayon 1. Calculer :*

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^n} dz \, (n \in \mathbb{Z}) \quad ; \quad \int_\gamma \frac{\cos z}{z} dz \quad ; \quad \int_\gamma \frac{\sin z}{z} dz \quad ; \quad \int_\gamma \frac{\cos z}{z^2} dz$$

Exercice 5.1.5

1. *Soit $f(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{i^n z^{n-1}}{n!}$. Montrer que f est entière et calculer $f(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.*
2. *Soit $r > 0$. En utilisant le circuit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ défini par*

$$\gamma(t) = \begin{cases} re^{2i\pi t}, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (4t-3)r, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases},$$

montrer que :

$$\int_{-r}^{r} f(x)dx - i\pi = -i\int_0^{\pi} \exp(ire^{ix})dx.$$

3. *En déduire la valeur de l'intégrale généralisée*

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

5.2 Indices

Exercice 5.2.1 *Soit γ l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a, b > 0$. En calculant de deux manières différentes $\int_\gamma \frac{dz}{z}$, donner la valeur de*

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t}.$$

Exercice 5.2.2

1. *Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| \neq 1$. Montrer que l'application $t \longmapsto \frac{1}{1-2\alpha\cos t + \alpha^2}$ est intégrable sur $[0, 2\pi]$.*
2. *Pour $|\alpha| \neq 1$, soit $f(\alpha) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1-2\alpha\cos t+\alpha^2}$. En considérant l'intégrale curviligne d'une fonction bien choisie le long du cercle unité, calculer $f(\alpha)$. La fonction f est-elle holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{z : |z| = 1\}$?*

Exercice 5.2.3 *Soit $V = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. On a vu que (cf. TD du chapitre 3) qu'il existe sur V une détermination holomorphe de $(z^2-1)^{1/2}$. Montrer que néanmoins, il n'existe pas de de détermination holomorphe de $\log(z^2 - 1)$.*

Exercice 5.2.4 *Soit U un domaine et f une fonction holomorphe sur U telle que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in U$.*

1. *Montrer que pour tout circuit γ tracé dans U on a :*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz \in \mathbb{Z}.$$

2. *En déduire que si pour tout $n \geq 2$, il existe sur U une détermination holomorphe de $(f(z))^{1/n}$, alors il existe sur U une détermination holomorphe de $\log f$.*

Exercice 5.2.5 *Soit $U = \mathbb{C} \setminus [-i, i]$.*

1. *Soit γ un circuit tracé dans U. Montrer que*

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2+1} = 0.$$

2. *Montrer qu'il existe une unique fonction f holomorphe sur U telle que $f'(z) = \frac{1}{z^2+1}$, $z \in U$ et $f(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{6}$.*
3. *Existe-t-il une primitive de $z \mapsto \frac{1}{z^2+1}$ dans $D(0,1[$? dans $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$?*