Feuille 5

Exercice 1 (L'univers constructible.) On définit une hiérarchie d'ensembles (V_α) indexée par les ordinaux. On pose

- $V_0 = \emptyset$;
- $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$;
- si α est un ordinal limite, alors $V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta$.

1. Montrer que pour chaque α, V_α est un ensemble transitif.
2. Montrer que $\beta < \alpha$ si, et seulement si, $V_\beta \in V_\alpha$ et que $\beta \leq \alpha$ si, et seulement si, $V_\beta \subseteq V_\alpha$.
3. Si x est un ensemble, alors on définit son rang $\mathrm{rg}(x)$ en posant

$$\mathrm{rg}(x) \quad = \quad \begin{cases} \text{le plus petit ordinal } \gamma \text{ tel que } x \in V_{\gamma+1} \text{ si un tel } \gamma \text{ existe;} \\ 0 \text{ sinon .} \end{cases}$$

   Montrer que $\mathrm{rg}(\alpha) = \alpha$ pour tout ordinal α.
4. Montrer que l'axiome de la fondation est équivalent à l'énoncé suivant : pour tout ensemble x, il existe un ordinal γ tel que $x \in V_\gamma$.
5. Montrer que la classe formée par tous les V_α satisfait les axiomes de ZF.

Définition : Soient $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre, et $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures de bases M et N respectivement.

1. Un *isomorphisme partiel* de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$ est un isomorphisme d'une sous-structure de $\mathcal{M}$ sur une sous-structure de $\mathcal{N}$.
2. Une famille non vide $\mathcal{F}$ d'isomorphismes partiels de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$ est dite *une famille Karpienne* entre $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ si pour tout $\sigma \in \mathcal{F}$
   – pour tout $m \in M$, il existe $\tau \in \mathcal{F}$ qui prolonge σ tel que $m \in \mathrm{Dom}(\tau)$;
   – pour tout $n \in N$, il existe $\tau \in \mathcal{F}$ qui prolonge σ tel que $n \in \mathrm{Im}(\tau)$.
   Une famille Karpienne sera dite un *va-et-vient*.
3. Deux structures sont dites ∞-*équivalentes* s'il existe un va-et-vient entre elles.

Exercice 2 (∞-équivalence.)

1. Soit $\mathcal{L}$ le langage avec un symbole $<$ de relation binaire. Montrer que deux ordres totaux, denses et sans extrémités sont ∞-équivalentes.
2. Soit $\mathcal{L}$ le langage avec un symbole $<$ de relation binaire. Vérifier si les paires suivantes de structures sont ∞-équivalentes :
   – $(\mathbb{Z}, <)$ et $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}, <)$ où la deuxième structure est ordonnée lexicographiquement en utilisant les ordres usuels sur $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}$, et avec priorité sur la première coordonnée ;
   – $(A \times \mathbb{Z}, <)$ et $(B \times \mathbb{Z}, <)$ où A et B sont deux ensembles finis non vides ordonnés et $<$ est l'ordre lexicographique avec priorité sur la première coordonnée ;
   – $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, <)$ et $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}, <)$ où l'ordre est lexicographique avec priorité sur la première coordonnée et les coordonnées sont ordonnées avec leurs ordres usuels ;
   – $(A \times \mathbb{Z}, <)$ et $(B \times \mathbb{Z}, <)$ où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux ordres totaux, denses, sans extrémités de bases A et B, et $<$ est l'ordre lexicographique avec priorité sur la première coordonnée.
3. On fixe un corps K et on considère le langage des K-espaces vectoriels : $\mathcal{L}(K) = \{0, +, \lambda_k | k \in K\}$ où $+$ est la loi interne, 0 l'élément neutre de celle-ci, chaque λ_k est un symbole de fonction unaire décrivant la multiplication par le scalaire k. Montrer que deux K-espaces vectoriels en tant que $\mathcal{L}(K)$-structures sont ∞-équivalents si, et seulement si, ils ont même dimension ou sont de dimensions infinies.
4. Montrer que deux structures dénombrables de même signature et qui sont ∞-équivalentes sont isomorphes.

Exercice 3 ($(\mathbb{Z}, +)$.) Soit $\mathcal{L} = \{0, +, -\}$ le langage où 0 est un symbole de constante, $+$ un symbole de fonction binaire et $-$ un symbole de fonction unaire.

1. Écrire dans ce langage les énoncés qui expriment que la $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ est un groupe abélien sans élément non neutre d'ordre fini (*sans torsion*) et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}/n\mathcal{M}$ est un groupe cyclique d'ordre n. Clairement, $(\mathbb{Z}, 0, +, -)$ est un modèle de ces énoncés.
2. On définit

$$\hat{\mathbb{Z}} = \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}} \in \prod_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \;\mid\; a_n \equiv a_m \pmod{m} \text{ si } m \text{ divise } n. \right\}$$

   On munit $\hat{\mathbb{Z}}$ d'une somme coordonnée par coordonnée dans les $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ respectifs. Montrer que c'est un groupe sans torsion, de cardinal $2^{\aleph_0}$, et modèle des énoncés du point précédent.