Chapitre 6

Formules de Cauchy, analyticité des fonctions holomorphes

6.1 Théorème de Goursat

Exercice 6.1.1 *Soit* Ω *un ouvert étoilé et* f *une fonction holomorphe sur* Ω*. On suppose que* $f(z) \neq 0$ *pour tout* $z \in \Omega$*. Montrer que, pour tout* $n \geqslant 2$*, il existe une détermination holomorphe sur* Ω *de la racine* $n-$*ième de* f*.*

Exercice 6.1.2 *Soit* $U = \mathbb{C} \setminus \{iy : y \in \mathbb{R},\, |y| \geqslant 1\}$*.*

(*i*) *Montrer qu'il existe une unique fonction* f *holomorphe sur* U *vérifiant*

$$\forall z \in U \;\; f'(z) = \frac{1}{1+z^2} \quad \text{et} \quad f(0) = 0.$$

(*ii*) *Justifier que* f *est analytique en* 0 *et donner son développement en série de Taylor.*

6.2 Formules de Cauchy

Exercice 6.2.1 *Calculer pour* $a \in \mathbb{C}^*$ *et* $R > 0$*,* $R \neq |a|$*, l'intégrale*

$$I = \int_{\gamma_R} \frac{e^{z^2}}{z^3 - a^3}\, dz\,,$$

où γ_R *est le cercle de centre* 0 *et de rayon* R*.*

Exercice 6.2.2 *Soit* f *une fonction entière telle que, pour tout* $z \in \mathbb{C}$*, on ait :*

$$|f(z)| \leqslant \sqrt{|z|}\,.$$

Montrer que f *est constante.*

Exercice 6.2.3 *Soit f une fonction entière telle que $|f(z)| \to +\infty$ quand $|z| \to +\infty$.*

1. *Montrer que l'ensemble des zéros de f est fini.*
2. *Montrer que f est un polynôme.*

Exercice 6.2.4 *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant le disque unité fermé $\overline{D} = D(0,1]$. On note γ le cercle unité parcouru une fois dans le sens positif.*

a) *Montrer qu'il existe $r > 1$ tel que $\mathrm{Supp}\gamma \subset D(0, r[\subset U$.*

b) *Soit f holomorphe sur U.*

  (i) *En calculant de deux manières différentes l'intégrale curviligne suivante*

$$I := \int_\gamma \left(2 + z + \frac{1}{z}\right) \frac{f(z)}{z}\, dz,$$

  donner la valeur de $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(e^{it}) \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) dt\,.$

  (ii) *On fixe $a \in \mathbb{C}^*$, $|a| \neq 1$. Calculer*

$$I(a) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{\overline{f(z)}}{z - a}\, dz.$$

Exercice 6.2.5 *Soient $R > 0$, f une fonction holomorphe sur $D(0, R[$ et continue sur $D(0, R]$. On note γ_R le cercle de centre 0 et de rayon R parcouru une fois dans le sens positif. Montrer que, pour tout $z \in D(0, R[$, on a*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_R} \frac{f(u)}{u - z}\, du\,.$$

Exercice 6.2.6 *Soit $R \geqslant 1$ et $f : D(0, R[\to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur $D(0, R[$. On suppose que, pour tout $z \in D(0, 1[$, on a*

$$|f(z)| \leqslant \frac{1}{1 - |z|}\,.$$

Montrer que $\forall n \geqslant 0$:

$$\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (n+1)\,.$$

6.3 Analyticité des fonctions holomorphes

Exercice 6.3.1 *Soit $f : \mathbb{C} \setminus \{2ik\pi \colon k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par*

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z}{e^z - 1} & si\ z \neq 0 \\ 1 & si\ z = 0. \end{cases}$$

a) *Montrer que f est analytique en 0. Soit $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ la série de Taylor de f à l'origine. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.*

b) *Montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que, pour tout $n \geqslant 0$, on ait*

$$|a_n| \leqslant \frac{M}{2^n}.$$

Exercice 6.3.2 *On fixe $\omega \in \mathbb{C}^*$ et on considère $g : z \longmapsto g(z) = \dfrac{1}{1 - 2\omega z + z^2}$.*

a) *Montrer qu'il existe un voisinage V de 0 et une fonction f holomorphe sur V telle que*

$$f(z)^2 = g(z),\ \forall z \in V \quad \text{et} \quad f(0) = 1.$$

b) *Montrer qu'il existe un disque ouvert D centré en 0 et $(P_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de polynômes de degré n telle que*

$$\forall z \in D, \quad f(z) = \sum_{n \geqslant 0} P_n(\omega) z^n.$$