

Chapitre 7

Zéros des fonctions holomorphes

Exercice 7.1 Soit Ω un domaine de \mathbb{C} .

1. Soient f et g deux fonctions holomorphes sur Ω telles que $f(z)g(z) = 0$ pour tout $z \in \Omega$. Montrer que f ou g est identiquement nulle.
2. Soit f une fonction holomorphe sur Ω . On suppose qu'il existe deux déterminations holomorphes de la racine carrée de f , notées g_1 et g_2 . Retrouver le fait que $g_1 = g_2$ ou $g_1 = -g_2$.

Exercice 7.2 Etudier l'existence et l'unicité de fonctions holomorphes f sur un voisinage connexe U de 0 telles que :

a) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}, \forall n \geq 1.$ b) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \exp(-n), \forall n \geq 1.$

Exercice 7.3 Déterminer les zéros de la fonction $z \mapsto 1 - \exp\left(\frac{z}{z-1}\right)$ dans le disque ouvert $D(0, 1[$. Cela contredit-il le principe des zéros isolés ?

Exercice 7.4 Soient U un domaine de \mathbb{C} et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de U qui converge vers $a \in U$ sans jamais prendre cette valeur. Soient f et g deux fonctions holomorphes sur U telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$f'(a_n)g(a_n) = g'(a_n)f(a_n).$$

Montrer que si $g(a) \neq 0$, alors il existe une constante $c \in \mathbb{C}$ telle que $f = cg$.

Exercice 7.5 Soient f et g deux fonctions entières telles que :

$$|f(z)| \leq |g(z)|, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

- a) Montrer que tout zéro z_0 de g est un zéro de f et que la multiplicité de f au point z_0 est au moins aussi grande que celle de g .

b) En déduire que f et g sont proportionnelles.

Exercice 7.6 On fixe $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On pose $a = e^{2i\pi t}$ et on note

$$U = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2} \right\}.$$

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur U telle que :

$$f(az) = f(z), \quad \forall z \in U.$$

Enfin on définit $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ par $g(z) = zf'(z) - f'(1)$, $z \in U$.

- Calculer $g(a^n)$, $n \in \mathbb{N}$.
- Montrer que g est identiquement nulle sur U .
- Montrer que f est constante.
- La conclusion subsiste-t-elle si on prend $t \in \mathbb{Q}$?

Exercice 7.7 Soit f une fonction entière.

- On pose $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$. Montrer que g est une fonction entière.
- On suppose qu'il existe une suite (a_n) de réels distincts tendant vers 0 et telle que la suite $f(a_n)$ soit une suite de réels. Montrer qu'alors $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$.
- On suppose en plus que la suite (a_n) de la question précédente est strictement décroissante et que pour tout entier n on a $f(a_{2n}) = f(a_{2n+1})$. Montrer que f est constante.
- Le résultat de la question précédente est-il encore valable si la suite (a_n) n'est pas strictement décroissante ?

Exercice 7.8 Soit f une fonction entière vérifiant

$$\forall z \in \mathbb{C} \exists n \in \mathbb{N} f^{(n)}(z) = 0.$$

Montrer que f est un polynôme.

(On rappelle que la notation $f^{(n)}$ désigne la dérivée n -ième de f)