Feuille 7

Exercice 1 (Une caractérisation des extensions élémentaires.) Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures. Montrer que $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$ si, et seulement si, pour tout k-uplet $\bar{a}$ extrait de M^k, $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(\bar{a}) = \mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(\bar{a})$.

Exercice 2 (Les types dans la théorie des chaînes denses sans extrémités.) On définit $\mathcal{L} = \{<\}$, langage avec un symbole de relation binaire. Soit T la théorie des chaînes denses sans extrémités dans ce langage. On sait que cette théorie est complète.

1. Montrer que deux k-uplets $(a_1, \ldots, a_k)$ et $(b_1, \ldots, b_k)$ extraits de deux modèles $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ respectivement de T ont même type si, et seulement si, ils satisfont les conditions suivantes :
   - pour tous $1 \leq i, j \leq k$, $a_i = a_j$ si, et seulement si, $b_i = b_j$;
   - pour tous $1 \leq i, j \leq k$, $a_i < a_j$ si, et seulement si, $b_i < b_j$.
2. On fixe $\mathbb{Q}$ comme ensemble de paramètres. Montrer que les ensembles suivants déterminent tous les 1-types possibles. En d'autres termes, ils axiomatisent des théories complètes deux à deux distinctes dans le langage $\mathcal{L}(\{x\} \cup \mathbb{Q})$.
   (a) $T \cup \{x = q\}$ pour chaque $q \in \mathbb{Q}$ fixé ;
   (b) $T \cup \{q < x \ \wedge \ x < q' \mid q' \in \mathbb{Q} \ , \ q < q'\}$ pour chaque $q \in \mathbb{Q}$ fixé ;
   (c) $T \cup \{q' < x \ \wedge \ x < q \mid q' \in \mathbb{Q} \ , \ q' < q\}$ pour chaque $q \in \mathbb{Q}$ fixé ;
   (d) $T \cup \{q < x \ \wedge \ x < q' \mid q, q' \in \mathbb{Q} \ , \ q < r < q'\}$ pour chaque $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ fixé ;
   (e) $T \cup \{x < q \mid q \in \mathbb{Q}\}$;
   (f) $T \cup \{q < x \mid q \in \mathbb{Q}\}$.
3. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|S_1(\{q_1, \ldots, q_n\})|$ où $q_1, \ldots, q_n$ des rationnels distincts. Déterminer $|S_1(\mathbb{Q})|$.

Exercice 3 (Les types dans la théorie des chaînes discrètes sans extrémités.) On définit $\mathcal{L} = \{<\}$, langage avec un symbole de relation binaire. Soit T la théorie des chaînes discrètes sans extrémités dans ce langage. On sait que cette théorie est complète.

1. Montrer que deux k-uplets $(a_1, \ldots, a_k)$ et $(b_1, \ldots, b_k)$ extraits de deux modèles $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ respectivement de T ont même type si, et seulement si, ils satisfont la condition suivante :
   - pour tous $1 \leq i, j \leq k$, $a_i < a_j$ si, et seulement si, $b_i < b_j$;
   - pour tous $1 \leq i, j \leq k$, $a_i = a_j$ si, et seulement si, $b_i = b_j$;
   - pour tous $1 \leq i, j \leq k$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe exactement n éléments extraits de $\mathcal{M}$ entre a_i et a_j si, et seulement si, il en est de même pour b_i et b_j.
2. Est-ce que les injections suivantes sont des plongements élémentaires ?

$$
\begin{array}{cccc} i_1 & : & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \{0,1\} \times \mathbb{Z} \\ & & m & \longmapsto & (0,m) \end{array} \ , \qquad
\begin{array}{cccc} i_2 & : & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \{0,1\} \times \mathbb{Z} \\ & & m & \longmapsto & \begin{cases} (0,m) & \text{si } m < 0 \\ (1,m) & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \ ,
$$

$$
\begin{array}{cccc} i_3 & : & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & & m & \longmapsto & a.m \end{array} \ \text{où } a \in \mathbb{N}^* \ , \qquad
\begin{array}{cccc} i_4 & : & (\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}) \cup ((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times 2\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \times \mathbb{Z} \\ & & (r,m) & \longmapsto & (r,m) \end{array} \ .
$$

Exercice 4 (Corps algébriquement clos.) Soit $\mathcal{L} = \{+, ., -, \ ^{-1}, 0, 1\}$ le langage des corps.

1. Écrire dans ce langage les énoncés qui disent "je suis un corps algébriquement clos". Y ajouter ensuite les énoncés nécessaires pour déterminer uniquement la caractéristique.

   Les deux ensembles d'énoncés du premier point ont des modèles. On notera les théories formées par leurs conséquences CAC et CAC$_p$ (p premier ou 0*) respectivement.*

2. Montrer que tout corps algébriquement clos a une extension élémentaire de degré de transcendance infini sur la clôture algébrique du corps premier.
3. Soient $\mathcal{K}$ et $\mathcal{L}$ deux corps algébriquement clos de même caractéristique et de degrés de transcendance infinis sur la clôture algébrique du corps premier. Montrer que les isomorphismes entres les sous-corps de type fini de $\mathcal{K}$ et $\mathcal{L}$ forment une famille karpienne. En déduire que CAC$_p$ est une théorie complète.
4. Utiliser le point précédent pour montrer que si $(a_1, \ldots, a_k)$ et $(b_1, \ldots, b_k)$ sont deux k-uplets $(k \geq 1)$ extraits respectivement de $\mathcal{K}$ et $\mathcal{L}$, alors ils satisfont les mêmes formules dans leurs structures respectives si, et seulement si, ils satisfont les mêmes formules sans quanteurs.
5. Déduire du point précédent que pour p, 0 ou premier, fixé, CAC$_p$ est modèle-complète : si $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$ sont modèles de CAC$_p$, alors $\mathcal{K} \preceq \mathcal{L}$.
6. Soit S un système fini d'équations et d'inéquations à plusieurs inconnues, dans un corps k. Montrer que si S a une solution dans une extension de k, il en a une dans toute extension algébriquement close de k.
7. (*Le théorème des zeros de Hilbert*) Soit K un corps algébriquement clos, I un idéal de $K[X_1, \ldots, X_n]$ et $P \in K[X_1, \ldots, X_n]$. On considère la variété $V(I) = \{\overline{a} \in K^n | Q(\overline{a}) = 0 \text{ pour tout } Q \in I\}$. Montrer que si $P \in K[X_1, \ldots, X_n]$ s'annule sur tout point de $V(I)$, alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $P^m \in I$.
8. (*Principe de transfert*) Soit ϕ un énoncé dans $\mathcal{L}$. Montrer que les conclusions suivantes sont équivalentes :
   (a) ϕ est vrai dans un corps algébriquement clos de caractéristique nulle ;
   (b) ϕ est vrai dans tout corps algébriquement clos caractéristique $p > 0$ pour tout p sauf un nombre fini de premiers ;
   (c) ϕ est vrai dans un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$ pour une infinité de nombres premiers p.
9. (*Principe de surjectivité*) Si f est une application polynomiale de $\mathbb{C}^m$ vers $\mathbb{C}^m$ $(m \in \mathbb{N}^*)$, et que f est injective, montrer alors que f est surjective.