Feuille 8

Exercice 1 (Le strict minimum sur les extensions ω-saturées) Soient $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre et $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure dont l'ensemble sous-jacent est noté M. Si κ est un cardinal infini, la structure $\mathcal{L}$ est dite κ-saturée si pour tout ensemble de paramètres $A \subset M$ de cardinal strictement inférieur à κ, tout 1-type sur A est réalisé dans $\mathcal{M}$. La structure $\mathcal{M}$ est dite saturée si elle est $(|M| + \aleph_0)$-saturée.

1. Montrer que toute structure finie est saturée.
2. Montrer que $\mathcal{M}$ est κ-saturée si et seulement si pour $0 < n < \omega$, et tout $A \subset M$ de cardinal strictement inférieur à κ, tout élément de $S_n(A)$ est réalisé dans $\mathcal{M}$.
3. Montrer que toute $\mathcal{L}$-structure a une extension ω-saturée.
4. Montrer que si deux $\mathcal{L}$-structures $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont ∞-équivalentes et que $\mathcal{M}$ est ω-saturée, alors $\mathcal{N}$ est ω-saturée.

Exercice 2 (Le théorème de Svenonius) Cet exercice a pour but de démontrer l'énoncé suivant :

Soient $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre, $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure d'ensemble sous-jacent M, $A \subset M$ et D une $\mathcal{L}$-formule qui définit une partie de M^n ($n \in \mathbb{N}^*$). Si

(*) *pour toute extension élémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$, pour tout automorphisme σ de $\mathcal{N}$ fixant A point par point et pour tout $x \in N^n$ (l'ensemble sous-jacent de $\mathcal{N}$), $\mathcal{N} \models D(x)$ si et seulement si $\mathcal{N} \models D(\sigma(x))$,*

alors D est définissable par une formule à paramètres dans A.

1. Montrer que la condition **(*)** équivaut à

Si pour toute extension élémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ et toute paire d'éléments $\alpha, \beta \in N^n$ on a $\mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(\alpha/A) = \mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(\beta/A)$, alors $\mathcal{N} \models D(\alpha)$ si et seulement si $\mathcal{N} \models D(\beta)$.

2. On fixe une extension élémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ et $\alpha \in N^n$ tel que $\mathcal{N} \models D(\alpha)$. On notera $\mathcal{L}^+$ le langage obtenu en ajoutant à $\mathcal{L}$ n symboles de constantes $c_1, \ldots, c_n$ et un symbole de constante pour chaque élément de M. On pose $c = (c_1, \ldots, c_n)$. Montrer que l'ensemble suivant d'énoncés de ce langage est inconsistant :

$$\mathrm{T}h(\mathcal{M}, M) \ \cup \ \{\phi(c) \mid \phi \in \mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(\alpha/A)\ \} \cup \ \{\neg D(c)\}\ .$$

En déduire l'existence d'une formule D_α dans $\mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(a/A)$ telle que dans toute extension élémentaire de $\mathcal{M}$, l'énoncé $\forall x(D_\alpha(x) \to D(x))$ soit vrai.

3. Le raisonnement du point précédent s'étend à toutes les extensions élémentaires de $\mathcal{M}$ et tous les n-uplets de celles-ci qui satisfont D. Utiliser ceci pour montrer l'existence d'une formule D_∞ à paramètres dans A telle que dans toute extension élémentaire de $\mathcal{M}$, l'énoncé $\forall x(D_\infty(x) \leftrightarrow D(x))$ soit vrai.

4. Trouver une preuve topologique du théorème de Svenonius.

Exercice 3 (La théorie du successeur) On définit le langage $\mathcal{L} = \{0, S\}$, où 0 est un symbole de constante et S un symbole de fonction unaire.

1. Écrire en premier ordre les énoncés qui expriment
   - que S est une injection,
   - que tout élément différent de 0 a une image inverse, son “prédécesseur”,
   - que 0 n'en a pas,
   - qu'il n'y a pas de “boucle” : si $S^n(x) = x$ alors $n = 0$.

   Cet ensemble d'énoncés est consistant vu que l'ensemble des nombres naturels muni de la fonction $x \mapsto x + 1$ *en est un modèle. On notera* T *la théorie formée des conséquences de ces énoncés.*

   On dira que deux éléments x *et* y *sont à distance infinie si il n'existe pas de* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $x = S^n(y)$ *ou* $y = S^n(x)$.

2. Montrer que si $\mathcal{M}$ est un modèle de T d'ensemble sous-jacent M et que $\{m_1, \ldots, m_n\} \subset M$, la sous-structure engendrée par $\{m_1, \ldots, m_n\}$ est isomorphe à l'union disjointe $\sqcup_{i \in I} \mathbb{N}$ munie de la fonction $x \mapsto x + 1$ sur chaque composante, où $1 \leq |I| \leq n + 1\}$. (*Notons que* n *peut être* 0.)
3. Montrer que tout modèle de T a une extension élémentaire ayant une infinité d'éléments deux à deux à distance infinie.
4. Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux modèles de T d'ensembles sous-jacents M et N respectivement qui satisfont la condition du point 3. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, soient $(a_1, \ldots, a_k) \in M^k$ et $(b_1, \ldots, b_k) \in N^k$ deux uplets qui satisfont les conditions suivantes :

   (i) pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_i = S^n(0)$ si et seulement si $b_i = S^n(0)$;

   (ii) pour tous $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $a_i = S^n(a_j)$ si et seulement si $b_i = S^n(b_j)$.

   Montrer que $(a_1, \ldots, a_k)$ et $(b_1, \ldots, b_k)$ se correspondent par un ∞-isomorphisme. En déduire que T élimine les quanteurs.
5. Montrer que les isomorphismes partiels entre deux sous-structures de type fini de deux modèles de T ayant la propriété du point 3 forment une famille karpienne.
6. Déduire du point précédent que T est une théorie complète.
7. Caractériser les modèles ω-saturés de T.
8. Pour tout $\kappa \geq \aleph_0$, déterminer le cardinal de $S_1(A)$ où A est un ensemble de paramètres de cardinal κ.
9. Quels sont les types isolés dans $S_1(\emptyset)$ et $S_2(\emptyset)$?