Corrigé CCP math I PSI 2003

PARTIE I

I.1 L'application $t \mapsto \mu(t)\cos t$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc G primitive d'une fonction continue est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, avec $G'(x) = \mu(x)\cos x$. De même pour H, avec $H'(x) = \mu(x)\sin x$. On en déduit

$$\begin{aligned} F'(x) &= \sin x\ (\mu(x)\cos x) + \cos x \int_0^x \mu(t)\cos t\,dt + \sin x \int_0^x \mu(t)\sin t\,dt - \cos x\ (\mu(x)\sin(x)) \\ &= \cos x \int_0^x \mu(t)\cos t\,dt + \sin x \int_0^x \mu(t)\sin t\,dt = \cos x\, G(x) + \sin x\, H(x) \end{aligned}$$

D'où $\boxed{F(0) = 0 \text{ et } F'(0) = 0}$

I.2

G et H étant de classe C^1, on en déduit que F' est de classe C^1 et donc que F est de classe C^2 et :

$$F''(x) = -\sin x\, G(x) + \cos^2 x\, \mu(x) + \cos x\, H(x) + \sin^2(x)\,\mu(x) = -F(x) + \mu(x).$$

Donc

$$\boxed{F''(x) + F(x) = \mu(x)}$$

I.3

On a problème de Cauchy

$$y'' + y = \mu, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0,$$

et d'après le théorème de Cauchy Lipschitz il y a unicité de la solution donc $\boxed{F = \varphi}$.
Remarque: l'égalité $\varphi(x) = \sin x \int_0^x \mu(t)\,dt - \cos x \int_0^x \mu(t)\,dt$ s'obtient aussi en appliquant la méthode de variation des constantes pour résoudre (E_μ).

I.4

I.4.1 Comme G est C^1 on peut dériver la primitive : $G'(x+2\pi) - G'(x) = \mu(x+2\pi)\cos(x+2\pi) - \mu(x)\cos x = 0$ car μ est $2\pi-$périodique. De même $H'(x+2\pi) - H'(x) = 0$.

I.4.2 La fonction $x \mapsto G(x+2\pi) - G(x)$ est donc constante sur $\mathbb{R}$ (intervalle) égale à sa valeur en 2π, soit:

$$\boxed{G(x+2\pi) - G(x) = G(2\pi)}$$

De même $\boxed{H(x+2\pi) - H(x) = H(2\pi)}$

I.4.3

$$\begin{aligned} \varphi(x+2\pi) - \varphi(x) = F(x+2\pi) - F(x) &= (G(x+2\pi) - G(x))\sin x - (H(x+2\pi) - H(x))\cos x \\ &\boxed{\varphi(x+2\pi) - \varphi(x) = F(x+2\pi) - F(x) = G(2\pi)\ \sin x - H(2\pi)\ \cos x} \end{aligned}$$

I.4.4 La famille $(\cos, \sin)$ étant libre, $\boxed{F \text{ est } 2\pi\text{-périodique si et seulement si } G(2\pi) = H(2\pi) = 0}$

I.4.5 Avec $\mu = \sin$ on a $G(2\pi) = \int_0^{2\pi} \sin t \cos t\,dt = 0$ et $H(2\pi) = \int_0^{2\pi} \sin^2 t\,dt = \pi \neq 0$ donc $\varphi_{\sin}$ n'est pas 2π-périodique. Même conclusion pour $\varphi_{\cos}$ car alors $G(2\pi) = \pi \neq 0$.

I.4.6 Pour $\mu = \sin$ on a d'après I4.4.3.

$$\varphi_{\sin}(x+2\pi) - \varphi_{\sin}(x) = -\pi\cos(x)$$

donc pour tout entier n on a comme $F(0) = 0$ et $\varphi_{\sin}(2n\pi) - \varphi_{\sin}((2n-2)x) = -\pi$

$$\varphi_{\sin}(2n\pi) = F(2n\pi) = 0 \times 0 - \cos(2n\pi) \times n\pi = -n\pi$$

donc $\varphi_{\sin}$ n'est pas bornée.

De même pour $\mu = \cos$ et pour tout entier n on a

$$\varphi_{\cos}\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = n\pi + G_{\cos}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

donc $\varphi_{\cos}$ n'est pas bornée.

Autre méthode : on peut aussi calculer

$$\varphi_{\sin}(x) = \frac{1}{2}\sin x - \frac{x}{2}\cos x$$

et

$$\varphi_{\cos}(x) = \frac{1}{2}x\sin x.$$

I.4.7 Pour $\mu = |\sin|$

$$G(2\pi) = \int_0^{2\pi} |\sin t| \cos t\, dt = \int_0^{\pi} \sin t \cos t\, dt - \int_{\pi}^{2\pi} \sin t \cos t\, dt,$$

et en faisant $t = \pi + u$ dans la deuxième intégrale cela donne $G(2\pi) = 0$. On obtient de même $H(2\pi) = 0$,

$$\boxed{\varphi \text{ est } 2\pi \text{ périodique}}$$

.

I.4.8 φ étant 2π-périodique : $\varphi(\mathbb{R}) = \varphi([0, 2\pi])$. La fonction φ étant continue , on a l'image d'un segment par une fonction continue et donc $\varphi(\mathbb{R})$ est borné.

Par dérivation d'une fonction $C^2, 2\pi$ périodique φ' et φ'' sont aussi continues et 2π-périodiques et donc bornées.

$$\phi_{|\sin|}, \phi'_{|\sin|}, \phi"_{|\sin|} \text{ sont bornés sur } \mathbb{R}$$

PARTIE II

II.1 $t \mapsto e^{-t}|\sin t|$ est continue positive sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall t \in \mathbb{R}^+, 0 \leqslant e^{-t}|\sin t| \leqslant e^{-t}$ ce qui montre que $t \mapsto e^{-t}|\sin t|$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ par majoration (puisque $t \mapsto e^{-t}$ l'est)

II.2

[I.2.1 $v_0 = \int_0^{\pi} e^{-t}|\sin t|\, dt = \int_0^{\pi} e^{-t} \sin t\ dt$

On calcule donc : $\int_0^{\pi} e^{-t}e^{it}dt = \int_0^{\pi} e^{(-1+i)t}\, dt = \left[\frac{e^{(-1+i)t}}{-1+i}\right]_0^{\pi} = \frac{-e^{-\pi}-1}{-1-i} = \frac{-1-i}{2}(-e^{-\pi} - 1)$

ce qui donne en prenant la partie imaginaire : $v_0 = \frac{e^{-\pi}+1}{2}$.

[I.2.2 Avec le changement de variable C_1 $t = n\pi + u$ on obtient:

$$v_n = \int_0^{\pi} e^{-n\pi - u}|\sin u|\, du = e^{-n\pi}v_0 = (e^{-\pi})^n v_0.$$

soit $\boxed{\rho = e^{-\pi}}$

[I.2.3 $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ est donc une série géométrique de raison $\in]-1, 1[$ donc convergente. De plus sa somme est égale à

$$\frac{v_0}{1-\rho} = \frac{1}{2}\frac{e^{-\pi}+1}{(1-e^{-\pi})}$$

[I.2.4 La fonction $t \mapsto e^{-t}|\sin t|$ étant intégrable sur $\mathbb{R}^+$ l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{-t}|\sin t|\, dt$ converge et

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}|\sin t|\, dt = \lim_{X\to+\infty} \int_0^{X} e^{-t}|\sin t|\, dt$$

pour calculer la limite (dont on connaît l'existence) on peut appliquer le critère séquentiel en utilisant la suite $(n\pi)$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}|\sin t|\, dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{n\pi} e^{-t}|\sin t|\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t}|\sin t|\, dt = \frac{1}{2}\frac{e^{-\pi}+1}{(1-e^{-\pi})}}$$

II.3

[I.3.1 Nous avons vu que φ était bornée sur $\mathbb{R}^+$.Donc

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ |e^{-t}\varphi(t)| \leqslant \|\varphi\|_\infty\, e^{-t}.$$

Donc l'application $t \mapsto e^{-t}\varphi(t)$ est continue et majorée en valeur absolue par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$ ce qui prouve qu'elle est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. De même $e^{-t}\varphi'(t)$ et $e^{-t}\varphi"(t)$.

I.3.2 Soit $X \in \mathbb{R}^+$. On a par partie , et en utilisant $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$

$$\begin{aligned}
\int_0^X \varphi(t)e^{-t}\,dt &= [-e^{-t}\varphi(t)]_0^X + \int_0^X \varphi'(t)e^{-t}\,dt \\
&= -\varphi(X)e^{-X} + [-e^{-t}\varphi'(t)]_0^X + \int_0^X \varphi''(t)e^{-t}\,dt \\
&= -\varphi(X)e^{-X} - \varphi'(X)e^{-X} + \int_0^X \varphi''(t)e^{-t}\,dt.
\end{aligned}$$

En faisant tendre X vers $+\infty$ (les intégrales généralisées convergent) on obtient :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \varphi(t)e^{-t}\,dt = \int_0^{+\infty} \varphi''(t)e^{-t}\,dt}$$

Or $\varphi(t) + \varphi''(t) = \mu(t)$ donc $\varphi(t)e^{-t} + \varphi''(t)e^{-t} = \mu(t)e^{-t}$ ce qui donne

$$2\int_0^{+\infty} \varphi(t)e^{-t}\,dt = \int_0^{+\infty} \mu(t)e^{-t}\,dt$$

et donc

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \varphi(t)e^{-t}\,dt = \frac{1}{4}\,\frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}}$$

PARTIE III

III.1

I.1.1 μ est 2π-périodique, continue et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ donc le théorème de convergence normale s'applique et la série de Fourier de μ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers μ.

I.1.2 De même pour φ puisque φ est 2π-périodique et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

III.2

I.2.1 μ étant paire on a pour tout n entier naturel $b_n(\mu) = 0$ et

$$\begin{aligned}
a_n(\mu) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \mu(t)\cos(nt)\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin t\cos(nt)\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\sin(n+1)t - \sin(n-1)t)\,dt.
\end{aligned}$$

On distingue $n = 1$

$$a_1(\mu) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(2t)\,dt = 0$$

et $n \neq 1$

$$\begin{aligned}
a_n(\mu) &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(n-1)t}{n-1} - \frac{\cos(n+1)t}{n+1}\right]_0^\pi \\
&= \frac{1}{\pi}\left[((-1)^{n-1} - 1)\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^{n-1} - 1}{(n-1)(n+1)}.
\end{aligned}$$

Soit pour tout entier naturel p :

$$\boxed{\begin{array}{c} a_{2p}(\mu) = \frac{-4}{\pi(4p^2-1)} \\ a_{2p+1}(\mu) = 0 \end{array}}$$

[I.2.2 En appliquant le résultat de **III.1.1** on a

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ |\sin t| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos(2pt)}{4p^2-1}}$$

qui donne pour $t = 0$

$$0 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{4p^2-1}$$

et donc

$$\boxed{\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{4p^2-1} = \frac{1}{2}}.$$

[I.2.3 On prouve la convergence et on obtient de plus la somme grâce au théorème de Parseval qui s'applique à μ puisque μ est 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt = \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{p=1}^{+\infty}a_{2p}^2\right]$$

soit

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt = \left[\frac{8}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(4p^2-1)^2}\right]$$

soit

$$1 = \frac{8}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(4p^2-1)^2}$$

et finalement

$$\boxed{\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(4p^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}}$$

III.3

remarque : d'après le I on sait que φ est 2π périodique. De plus comme solution de l'équation différentielle $\varphi \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

[I.3.1 $G(x) = \int_0^x |\sin t| \cos t\,dt$ et donc $G(-x) = \int_0^{-x} |\sin t| \cos t\,dt = -G(x)$ après avoir fait le changement de variable $u = -t$. Donc G est impaire. De même H est paire. On en déduit que φ est paire. Et donc $b_n(\varphi) = 0$ pour $n \in N^*$.

[I.3.2 φ étant C^2 , 2π périodique on sait que $c_n(\varphi") = (in)^2 c_n(\varphi) = -n^2 c_n(\varphi)$ donc $\boxed{a_n(\varphi'') = -n^2 a_n(\varphi)}$

[I.3.3 On a $\varphi + \varphi'' = \mu$ et donc par linéarité des coefficients de Fourier $a_n(\varphi) + a_n(\varphi'') = a_n(\mu)$ soit $(1 - n^2)a_n(\varphi) = a_n(\mu)$.

Donc pour $n \neq 1$ on a $a_n(\varphi) = \frac{1}{1-n^2}a_n(\mu)$ ce qui donne

$$\forall p \in \mathbb{N},\ a_{2p}(\varphi) = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{(1-4p^2)(4p^2-1)} = \frac{4}{\pi(4p^2-1)^2}$$

et

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ a_{2p+1}(\varphi) = 0.$$

[I.3.4 III.1.2donne donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \frac{2}{\pi} + a_1(\varphi)\cos x + \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos(2px)}{(4p^2-1)^2}$$

Pour $x = 0$ on obtient

$$\varphi(0) = 0 = \frac{2}{\pi} + a_1(\varphi) + \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(4p^2-1)^2}$$

d'où , sachant $\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(4p^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$

$$a_1(\varphi) = -\frac{\pi}{4}.$$

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{\pi}{4}\cos x + \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos(2px)}{(4p^2-1)^2}}$$

III.4 On justifie la convergence de la série par le fait que

$$\frac{1}{(4p^2-1)(16p^4-1)} \sim_{p\to\infty} \frac{1}{64p^6} > 0.$$

En notant $a_i = a_i(\varphi)$ on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-t}\varphi(t)\,dt &= \int_0^{+\infty} e^{-t}\left[\frac{2}{\pi} + a_1\cos t + \sum_{p=1}^{+\infty} a_{2p}\cos(2pt)\right] dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt + a_1\int_0^{+\infty} \cos t\, e^{-t}\,dt + \int_0^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} a_{2p}\cos(2pt)e^{-t}\right) dt.
\end{aligned}$$

Il s'agit donc maintenant de justifier l'intégration terme à terme de la série :

- $t \mapsto a_{2p}\cos(2pt)\,e^{-t}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car $|\cos(2pt)\,e^{-t}| \le e^{-t}$
- la série de fonctions $\sum a_{2p}\cos(2pt)\,e^{-t}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction continue ($\varphi - a_0 - a_1\cos$)
- $\int_0^{+\infty} |a_{2p}\cos(2pt)e^{-t}|\,dt \leqslant \int_0^{+\infty} a_{2p}e^{-t}\,dt = |a_{2p}| = \frac{4}{\pi(4p^2-1)^2} \sim_{p\to\infty} \frac{1}{16\pi p^4} (> 0)$ terme général d'une série convergente.

Le théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions s'applique et permet donc le calcul :

$$\int_0^{+\infty} \cos(nt)e^{-t}\,dt = \mathrm{Re}\left[\int_0^{+\infty} e^{(-1+in)t}\,dt\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{e^{(-1+in)t}}{-1+in}\right]_0^{+\infty} = \mathrm{Re}\left[\frac{-1}{-1+in}\right] = \frac{1}{1+n^2}$$

d'où $\int_0^{+\infty} \cos t\, e^{-t}\,dt = \frac{1}{2}$ et $\int_0^{+\infty} \cos(2pt)\,e^{-t}\,dt = \frac{1}{1+4p^2}$ donc

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-t}\varphi(t)\,dt &= \frac{2}{\pi} + \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(4p^2-1)^2(4p^2+1)} \\
&= \frac{1}{4}\,\frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}} \text{ d'après le II}
\end{aligned}$$

et donc

$$\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(4p^2-1)^2(4p^2+1)} = \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{4}\frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}} - \frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{8}\right]$$

et donc :

$$\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(4p^2-1)(16p^4-1)} = \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{4}\frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}} - \frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{8}\right]$$

III.5

[I.5.1 $G_\varphi(2\pi) = \int_0^{2\pi} \varphi(t)\cos t\,dt = \pi a_1(\varphi) < 0$ donc ϕ n'est pas 2π-périodique d'après le critère de **I.4.4**.

[I.5.2 On a $\phi(x) = \sin x\, G_\varphi(x) - \cos x\, H_\varphi(x)$ donc

$$\phi\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \phi\left(\frac{\pi}{2}\right) + nG_\phi(2\pi) \longrightarrow -\infty$$

ce qui prouve que ϕ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.

[I.5.3 Soit $x \geqslant 0$. Alors

$$|G_\varphi(x)| = \left|\int_0^x \varphi(t)\cos t\,dt\right| \leqslant \int_0^x \|\varphi\|_\infty\,dt \le \|\varphi\|_\infty\,x$$

et de même

$$|H_\varphi(x)| = \left|\int_0^x \varphi(t)\sin t\,dt\right| \leqslant \|\varphi\|_\infty\,x$$

On en déduit

$$|\phi(x)| = |F_\varphi(x)| \leqslant 2x\,\|\varphi\|_\infty$$

et donc $|e^{-t}\phi(t)|$ est continue positive sur $\mathbb{R}^+$ et $t^2\,|e^{-t}\phi(t)| \le 2\,\|\varphi\|_\infty\,t^3e^{-t}$

Ainsi l'application $t \mapsto e^{-t}\phi(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, négligeable devant une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$, elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$.