

Les calculatrices sont autorisées.

N.B. Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans tout ce problème, on désigne par μ une application continue 2π -périodique de \mathbf{R} dans \mathbf{R} et on considère l'équation différentielle :

$$(E_\mu) \quad y'' + y = \mu(t)$$

On désigne par φ_μ la solution sur \mathbf{R} de (E_μ) qui vérifie en outre les relations $\varphi_\mu(0) = \varphi'_\mu(0) = 0$. Pour $x \in \mathbf{R}$, on note :

$$G_\mu(x) = \int_0^x \mu(t) \cos t dt \quad \text{et} \quad H_\mu(x) = \int_0^x \mu(t) \sin t dt$$

Dans la partie I, on étudie quelques propriétés de la fonction φ_μ . Dans la partie II et la partie III, on étudie un exemple explicite.

PARTIE I

On désigne par F_μ la fonction définie sur \mathbf{R} par $F_\mu(x) = (\sin x) G_\mu(x) - (\cos x) H_\mu(x)$.

Pour simplifier les notations, on écrira F, G, H, φ pour désigner les fonctions $F_\mu, G_\mu, H_\mu, \varphi_\mu$.

- I.1** Justifier la dérivabilité de G, H et donc F . Préciser $F(0)$ et $F'(0)$.
- I.2** Montrer que F est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbf{R} et exprimer $F''(x) + F(x)$ en fonction de $\mu(x)$.
- I.3** Justifier l'affirmation $F = \varphi$.
- I.4 Etude du caractère 2π -périodique de φ .**
 - I.4.1** Calculer la dérivée de $G(x + 2\pi) - G(x)$ et $H(x + 2\pi) - H(x)$.
 - I.4.2** Exprimer $G(x + 2\pi) - G(x)$ en fonction de $G(2\pi)$ et $H(x + 2\pi) - H(x)$ en fonction de $H(2\pi)$.
 - I.4.3** Exprimer $\varphi(x + 2\pi) - \varphi(x)$ en fonction de $\sin x, \cos x, G(2\pi), H(2\pi)$.
 - I.4.4** A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur $G(2\pi)$ et $H(2\pi)$ la fonction φ est-elle 2π -périodique ?
 - I.4.5** La fonction φ est-elle 2π -périodique lorsque $\mu(t) = \sin t$? (resp. lorsque $\mu(t) = \cos t$?)
 - I.4.6** La fonction φ est-elle bornée lorsque $\mu(t) = \sin t$? (resp. lorsque $\mu(t) = \cos t$?)
 - I.4.7** Montrer que la fonction φ est 2π -périodique lorsque $\mu(t) = |\sin t|$.
 - I.4.8** Les fonctions φ, φ' et φ'' sont-elles bornées lorsque $\mu(t) = |\sin t|$?

Dans toute la suite du problème, on suppose que $\mu(t) = |\sin t|$.

PARTIE II

Calcul de $\int_{\mathbf{R}_+} e^{-t}\varphi(t) dt$

II.1 Justifier l'intégrabilité sur \mathbf{R}_+ de la fonction $t \mapsto e^{-t}|\sin t|$.

II.2 Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $v_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-t}|\sin t| dt$.

II.2.1 Calculer v_0 .

II.2.2 Montrer qu'il existe un nombre réel ρ (que l'on explicitera) tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on ait $v_n = \rho^n v_0$.

II.2.3 En déduire la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ et expliciter sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

II.2.4 En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{\mathbf{R}_+} e^{-t}|\sin t| dt$.

II.3

II.3.1 Déduire des résultats obtenus dans la partie I (en particulier de **I.4.8**) que les fonctions $t \mapsto e^{-t}\varphi(t)$, $t \mapsto e^{-t}\varphi'(t)$ et $t \mapsto e^{-t}\varphi''(t)$, sont intégrables sur \mathbf{R}_+ .

II.3.2 Etablir une relation entre $\int_{\mathbf{R}_+} e^{-t}\mu(t) dt$ et $\int_{\mathbf{R}_+} e^{-t}\varphi(t) dt$.

En déduire $\int_{\mathbf{R}_+} e^{-t}\varphi(t) dt$.

PARTIE III

Développement de Fourier des fonctions μ et φ .

Si f est une application continue 2π -périodique de \mathbf{R} dans \mathbf{R} , on désigne par $a_n(f)$ et $b_n(f)$ les coefficients de Fourier réels de f :

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt \quad \text{pour } n \in \mathbf{N}.$$

Lorsqu'elle converge, on désigne par $SF_f(t)$ la somme de la série de Fourier :

$$SF_f(t) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos(nt) + b_n(f) \sin(nt).$$

III.1

III.1.1 Justifier la convergence de la série de Fourier de la fonction μ (**rappel** : $\mu(t) = |\sin t|$).

III.1.2 Justifier la convergence de la série de Fourier de la fonction φ (**rappel** : $\varphi''(t) + \varphi(t) = |\sin t|$, $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$).

III.2 Série de Fourier de la fonction μ .

III.2.1 Calculer les coefficients $a_n(\mu)$ pour $n \in \mathbf{N}$. Quelle est la valeur des coefficients $b_n(\mu)$ pour $n \in \mathbf{N}^*$?

III.2.2 Etablir la convergence de la série $\sum_{p \geq 1} \frac{1}{4p^2 - 1}$ et expliciter sa somme $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^2 - 1}$.

III.2.3 Etablir la convergence de la série $\sum_{p \geq 1} \frac{1}{(4p^2 - 1)^2}$ et expliciter sa somme $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(4p^2 - 1)^2}$.

III.3 Série de Fourier de la fonction φ .

III.3.1 Etudier la parité des fonctions G , H puis celle de la fonction φ . Quelle est la valeur des coefficients $b_n(\varphi)$ pour $n \in \mathbf{N}^*$?

III.3.2 Etablir une relation entre $a_n(\varphi'')$ et $a_n(\varphi)$ pour $n \in \mathbf{N}$.

III.3.3 En déduire la valeur de $a_n(\varphi)$ pour $n \neq 1$.

III.3.4 Calculer $a_1(\varphi)$.

III.4 On considère la série $\sum_{p \geq 1} \frac{1}{(4p^2 - 1)(16p^4 - 1)}$. Justifier la convergence de cette série et expliciter sa somme $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(4p^2 - 1)(16p^4 - 1)}$ en calculant l'intégrale du **II** par un autre procédé qu'on justifiera soigneusement.

III.5 On considère dans cette question l'application ϕ de classe \mathcal{C}^2 de \mathbf{R} dans \mathbf{R} vérifiant :

$$\begin{aligned} \phi''(t) + \phi(t) &= \varphi(t) \quad \text{pour tout } t \in \mathbf{R} \\ \text{et} \quad \phi(0) &= \phi'(0) = 0. \end{aligned}$$

III.5.1 La fonction ϕ est-elle 2π -périodique ?

III.5.2 La fonction ϕ est-elle bornée sur \mathbf{R} ?

III.5.3 La fonction $t \mapsto e^{-t}\phi(t)$ est-elle intégrable sur \mathbf{R}_+ ?

Fin de l'énoncé.