Exercices d'algèbre linéaire (non corrigés),

Cécile Mercadier,
Institut Camille Jordan, Lyon 1

Exercice 1 **1.** Montrer que l'application $f : P \mapsto P + XP'$ définit un endomorphisme de $R_1[X]$.
2. Soient P_1 et P_2 les polynômes définis par $P_1(X) = 1$ et $P_2(X) = 1 + X$. Montrer que (P_1, P_2) est une base de $R_1[X]$.
3. Quelle est la matrice de f dans la base (P_1, P_2) ?

Exercice 2 Soit $f : R^3 \to R^3$ l'application définie par $f(x, y, z) = (x + 2z, y, y + z)$.
1. Donner la matrice de f dans la base canonique.
2. Déterminer $Ker(f)$ et $Im(f)$.
3. On pose $e'_1 = (1, 0, 0), e'_2 = (1, 1, 0) ete'_3 = (1, 1, 1)$. Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) forme une base de R^3.
4. Déterminer la matrice de f dans la base (e'_1, e'_2, e'_3).

Exercice 3 Soit $f : R^2 \to R^3$ l'application définie par $f(x, y) = (x, x + y, 2y)$.
1. Donner la matrice de f dans les bases canoniques.
2. L'application f est-elle surjective ?
3. Montrer que $u_1 = (1, 2)$ et $u_2 = (2, 5)$ forment une base de R^2.
4. Montrer que $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0)$ et $v_3 = (0, 1, 1)$ forment une base de R^3.
5. Quelle est la matrice de f dans les bases (u_1, u_2) et (v_1, v_2, v_3).

Exercice 4 Soit $f : R^2[X] \to R2$ l'application définie par $f(P) = (P(0), P'(0))$.
1. Donner la matrice de f dans les bases canoniques.
2. Déterminer $Ker(f)$ et $Im(f)$.
3. Montrer que les polynômes P_1, P_2 et P_3 définis par $P_1(X) = 1$, $P_2(X) = 1 + X$ et $P_3(X) = 1 + X^2$ forment une base de $R_2[X]$.
4. Montrer que $v_1 = (1, 2)$ et $v_2 = (2, 5)$ forment une base de R^2.
5. Déterminer la matrice de f dans les bases (P_1, P_2, P_3) et (v_1, v_2).

Exercice 5 $E = R^3$, $F = Vect((1, 1, 1); (0, 1, 1))$, $G = Vect((1, 0, 1))$.
Montrer que $E = F \oplus G$; exprimer les projecteurs associés.

Exercice 6 On considère f un endomorphisme de R^3 qui vérifie $f \circ f \circ f = 0$ et $f \circ f \neq 0$.
1. Montrer qu'il existe $x \in R^3$ tel que la famille $B = \{x, f(x), f \circ f(x)\}$ soit une base de R^3.
2. Quelle est la matrice de f dans cette base ?
3. Déterminer une base de $Im(f)$. Quelle est la dimension de $Ker(f)$?

Exercice 7 Soit $f : R^3 \to R^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x,y,z) = (2x - 4y + 17z, 10z, 5z).$$

Soient v_1, v_2 et v_3 les trois vecteurs de R^3 suivants :
$v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (2,1,0)$, $v_3 = (3,2,1)$.
1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique E.
2. f est-elle inversible ? Quel est le rang de f ?
3. Montrer que $E' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de R^3 et donner la matrice de passage P de la base canonique E à la base E'.
4. Déterminer P^{-1}.
5. Trouver la matrice de f dans la base E'.
6. Montrer que $Ker(f)$ est l'espace vectoriel engendré par v_2 et que $Im(f)$ est l'espace vectoriel engendré par v_1 et v_3.

Exercice 8 Soit $f : R^3 \to R^3$ l'application définie par $(x,y,z) \mapsto (x-y+z, -x+y+z, 2z)$.
1. Montrer que f est une application linéaire et déterminer sa matrice A dans la base canonique $e = \{e1, e2, e3\}$ de R^3.
2. Déterminer $Ker(f)$ et en donner une base. On notera u_1 le vecteur de cette base. L'application f est-elle injective ? Surjective ?
3. Déterminer la dimension de $Im(f)$ et montrer que les vecteurs $u_2 = f(e_2) = (-1,1,0)$ et $u_3 = f(e_3) = (1,1,2)$ en forment une base.
4. Montrer que $Im(f) = Ker(f - 2id)$ (on calculera $f(u2)$ et $f(u3)$).
5. Démontrer que $u = \{u1, u2, u3\}$ est une base de R^3 et déterminer la matrice D de f dans cette base.
6. Donner une matrice P inversible telle que $D = P^{-1}AP$.