

LICENCE 3 – PROBABILITÉS
EXERCICES CORRIGÉS DE TD

Cécile Mercadier, Johannes Kellendonk, Laurent Tournier
Associés au cours de Stéphane Attal

Année universitaire : 2008-2009

FEUILLE DE TD 1

Dénombrement

Exercice 1

Trois cartes sont tirées d'un jeu de 52 cartes. Calculer les probabilités des événements suivants :

- (i) Trois piques (ii) Aucun pique (iii) Un pique et deux "non-piques"
(iv) Au moins un pique (v) Trois cartes de la même famille (vi) Trois cartes de familles différentes
(vii) Trois as (viii) Aucun as (ix) Trois cartes rouges lorsque :

1. On suppose que les cartes sont, l'une après l'autre, tirées au hasard et remises dans le jeu.
2. On suppose que les cartes sont tirées simultanément au hasard.

Exercice 2 Soit n et p deux entiers non nuls.

1. De combien de façons peut-on répartir p enveloppes identiques dans n boîtes aux lettres ?
2. En déduire le cardinal de l'ensemble $E_1 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n, x_1 + \dots + x_n = p\}$.
3. Supposons $p \geq n$. De combien de façons peut-on répartir p enveloppes identiques dans n boîtes aux lettres de sorte qu'aucune boîte aux lettres ne reste vide ?
4. De quel ensemble E_2 (construit de façon similaire à E_1) peut-on en déduire le cardinal ?
5. De combien de façons peut-on répartir p enveloppes distinctes dans n boîtes aux lettres ?

Exercice 3 Soit n et p deux entiers non nuls.

1. Déterminer le cardinal de l'ensemble des suites croissantes (au sens strict) de p éléments de $\{1, \dots, n\}$.
2. Déterminer le cardinal de l'ensemble des suites croissantes (au sens large) de p éléments de $\{1, \dots, n\}$.

Caractérisation d'une loi de probabilité

Exercice 4 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} ou \mathbb{Z} définie sur l'espace de probabilité discret (Ω, \mathbb{P}) . Démontrer que sa fonction de répartition, notée F_X , définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

vérifie les propriétés suivantes :

1. F_X est croissante avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$.

2. F_X est continue à droite en tout point et admet des limites à gauche en tout point. De plus $\lim_{y \rightarrow x^-} F_X(y) = \mathbb{P}(X < x)$.
3. F_X caractérise la loi de X .

Exercice 5 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} définie sur l'espace de probabilité discret (Ω, \mathbb{P}) . On définit sa fonction génératrice par

$$G_X(s) = \mathbb{E}(s^X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X = k) s^k.$$

1. Montrer que G_X est bien définie sur $[-1, 1]$.
2. Montrer que G_X caractérise la loi de X .
3. Supposons que X et X^2 sont intégrables. Notons G'_X et G''_X les dérivées première et seconde de G_X . Montrer que $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$ et $\mathbb{E}(X^2) = G''_X(1) + G'_X(1)$. En déduire l'expression de $\text{Var}(X)$.

CORRECTION FEUILLE DE TD 1

Référence

Introduction aux probabilités

Delmas, Jean-Pierre

Ellipses

BU Maths 19.2 DEL

Rappel de cours : Dénombrement

- Le nombre d'applications d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments est n^p .
- Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments – bijections de cet ensemble dans lui-même – est $n!$.
- Le nombre d'arrangements – injections – d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments est $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.
- Le nombre de combinaisons – ou sous-ensembles – à p éléments dans un ensemble à n éléments ($\geq p$) est $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Rappel de cours : Probabilités sur un ensemble fini

On convient de représenter une expérience aléatoire \mathcal{E} , c'est-à-dire, une expérience soumise au hasard, par Ω l'ensemble des résultats possibles. Une réalisation ω , un élément de Ω est aussi appelé expérience élémentaire.

Un événement aléatoire A est l'ensemble des expériences élémentaires ω qui réalisent A . Comme Ω est fini, la probabilité \mathbb{P} sur Ω définie par $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/\text{card}(\Omega)$ s'appelle la probabilité uniforme sur Ω . C'est la probabilité qui rend toutes les expériences élémentaires ω équiprobables. On a alors $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$.

Exercice 1 On peut décider qu'un jeu de cartes est l'ensemble $\{1, \dots, 52\}$ avec par exemple $\{1, \dots, 13\}$ les piques, puis les trèfles, puis les coeurs, puis les carreaux.

1. L'univers Ω est $\{1, \dots, 52\}^3$ donc $\text{card}(\Omega) = 52^3$.

Comme les tirages sont faits au hasard, on peut munir Ω de la probabilité uniforme : tous les événements élémentaires E ont la même probabilité : $1/52^3$. Plus généralement, on sait que la probabilité d'un événement A quelconque se calcule comme $\text{card}(A)/\text{card}(\Omega)$.

(i) $1/64$ car à chaque fois un pique soit 13^3 cas favorables

(ii) $27/64$ car il s'agit de faire cette expérience sur $52 - 13 = 39$ cartes, autrement dit, 39^3 cas favorables

(iii) $27/64$ car on a $3 \times 13 \times 39^2$ cas favorables

(iv) $37/64$ complémentaire de (ii)

(v) $1/16$ car 3×13^3 cas favorables

(vi) $3/8$ car $52 \times 39 \times 26$ cas favorables

(vii) $1/2197$ car 4^3 cas favorables

(viii) $1728/2197$ car 48^3 cas favorables

(ix) $1/8$ car 26^3 cas favorables

2. Dans cette expérience, Ω est l'ensemble des combinaisons de 3 éléments parmi 52.

Son cardinal vaut donc C_{52}^3 . Comme les tirages sont faits au hasard, on peut munir Ω de la probabilité uniforme : tous les événements élémentaires E ont la même probabilité : $1/C_{52}^3$. Plus généralement, on sait que la probabilité d'un événement A quelconque se calcule comme $card(A)/card(\Omega)$.

- (i) C_{13}^3/C_{52}^3 (ii) C_{39}^3/C_{52}^3 (iii) $C_{13}^1 C_{39}^2/C_{52}^3$ (iv) $1 - C_{39}^3/C_{52}^3$ (v) $4C_{13}^3/C_{52}^3$
 (vi) $4(C_{13}^1)^3 C_{52}^3$ (vii) $4/C_{52}^3$ (viii) C_{48}^3/C_{52}^3 (ix) C_{26}^3/C_{52}^3

Exercice 2 1. On peut modéliser les n boîtes aux lettres à l'aide de $n - 1$ séparateurs donc une configuration est un ensemble de $n - 1 + p$ éléments qui est déterminée par exemple par la position des séparateurs, soit en tout C_{n+p-1}^{n-1} possibilités.

2. On peut voir ce problème comme le nombre de répartitions de p enveloppes dans n boîtes aux lettres avec x_i le nombre d'enveloppes dans la boîte aux lettres i . On a bien $x_i \in \mathbb{N}$ et $x_1 + \dots + x_n = p$. Donc $Card(A) = C_{n-1+p}^{n-1}$.

3. On commence par mettre une enveloppe par boîte aux lettres. Il s'agit alors de calculer le nombre de façons de répartir $p - n$ enveloppes dans n boîtes aux lettres soit C_{p-1}^{n-1} possibilités.

4. $E_2 = \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{N}^*)^n, x_1 + \dots + x_n = p\}$.

5. Pour chaque enveloppe on attribue une boîte aux lettres, soit n^p possibilités.

Exercice 3 1. L'ensemble des suites strictement croissantes de p éléments de $\{1, \dots, n\}$ est en bijection avec l'ensemble des parties à p éléments de $\{1, \dots, n\}$. En effet, on peut associer à toute suite strictement croissante (s_1, \dots, s_p) une partie $\{s_1, \dots, s_p\}$ à p éléments de $\{1, \dots, n\}$, et l'application réciproque consiste à ordonner les éléments d'une partie $\{s_1, \dots, s_p\}$. Le cardinal recherché est donc le nombre de combinaisons de p éléments parmi n , soit C_n^p .

2. Se donner une suite croissante (au sens large) de p éléments de $\{1, \dots, n\}$ revient à se donner, pour $i = 1, \dots, n$, le nombre x_i d'éléments de la suite égaux à i , avec la condition $\sum_{i=1}^n x_i = p$ et $x_i \geq 0$. On voit ainsi que l'on est ramené à la question 1 de l'exercice 2, donc la réponse est C_{n-1+p}^{n-1} .

Autre solution : on se ramène à la question précédente par la bijection

$$\phi : (x_1, x_2, \dots, x_p) \mapsto (x_1, x_2 + 1, \dots, x_p + p - 1),$$

qui envoie les suites croissantes (au sens large) de p éléments de $\{1, \dots, n\}$ dans l'ensemble des suites strictement croissantes de p éléments de $\{1, \dots, n+p-1\}$. Pour le voir, noter que si (y_1, \dots, y_n) est strictement croissante à valeurs dans $\{1, \dots, n+p-1\}$, alors $y_i \geq y_{i-1} + 1$ et $y_i \geq i$ pour tout i (par récurrence). L'image par ϕ de notre ensemble est l'ensemble décrit dans la question précédente dans lequel n devient $n+p-1$ donc le cardinal recherché est $C_{n+p-1}^p = C_{n-1+p}^{n-1}$ éléments.

Exercice 4 1. F_X est croissante puisque si $x < y$, $F_X(y) = F_X(x) + \mu_X(]x, y]) \geq F_X(x)$. $\lim_{n \rightarrow +\infty}]-\infty, -n] = \cap_{n \in \mathbb{N}}]-\infty, -n] = \emptyset$ comme limite d'une suite décroissante d'ensembles et $\lim_{n \rightarrow +\infty}]-\infty, n] = \cap_{n \in \mathbb{N}}]-\infty, n] = \mathbb{R}$ comme limite d'une suite croissante d'ensembles. Par continuité de l'application probabilité, on a $\lim_{n \rightarrow -\infty} F_X(n) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} F_X(n) = \mathbb{P}(\mathbb{R}) = 1$.

2. F_X est continue à droite car $\lim_{n \rightarrow \infty}]-\infty, x + 1/n] = \cap_{n \in \mathbb{N}}]-\infty, x + 1/n] =]-\infty, x]$. De plus, $\lim_{n \rightarrow \infty}]-\infty, x - 1/n] = \cap_{n \in \mathbb{N}}]-\infty, x - 1/n] =]-\infty, x[$.

3. On a $F_X(x) - F_X(x^-) = \mu_X(\{x\})$. En particulier, on retrouve toutes les probabilités

$$\mu_X(\{k\}) = \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X^{-1}(\{k\})) = \mathbb{P}(\{\omega, X(\omega) = k\}).$$

Exercice 5 1. La série $\sum \mathbb{P}(X = n)s^n$ est absolument convergente pour $|s| \leq 1$ car $|\mathbb{P}(X = n)s^n| \leq \mathbb{P}(X = n)$ et $\sum \mathbb{P}(X = n) = 1$. La fonction est bien définie sur $[-1, 1]$.

2. G_X est la somme de la série entière de terme général $\mathbb{P}(X = n)s^n$. Elle est donc indéfiniment dérivable sur $] - 1, 1[$. De plus, on sait que ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme de la série. On a donc $G_X^{(k)}(s) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)P(X = n)s^{n-k}$ et $G_X^{(k)}(0) = k!\mathbb{P}(X = k)$. On peut donc reconstruire la loi de X à l'aide de la formule suivante : $\mathbb{P}(X = k) = G_X^{(k)}(0)/k!$.

3. Si X est intégrable, par définition la série $\sum nP(X = n)$ est convergente. La série $\sum nP(X = n)s^{n-1}$ est normalement convergente pour $|s| \leq 1$ car $\sup_s |nP(X = n)s^{n-1}| = nP(X = n)$. Par conséquent, sa somme est la dérivée de la somme de la série $\sum \mathbb{P}(X = n)s^n = G_X(s)$, autrement dit $G_X'(s)$. En résumé $G_X'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(X = n)s^{n-1}$ et G_X' est bien définie sur $[-1, 1]$.

On montre de la même manière que si $\mathbb{E}(X(X-1))$ existe alors $G_X''(s) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)P(X = n)s^{n-2}$ et G_X'' bien définie sur $[-1, 1]$.

Pour $s = 1$, $G_X'(1) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(X = n) = \mathbb{E}(X)$ et $G_X''(1) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)P(X = n) = \mathbb{E}(X(X-1))$. On en déduit que $\text{Var}(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2$.

FEUILLE DE TD 2

Rappels : Lois usuelles discrètes

Bernoulli(p) avec $p \in [0, 1]$: $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$ et $\mathbb{P}(X = 1) = p$.

Binomiale(n, p) avec $n > 0$ et $p \in [0, 1]$: $\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ pour $k = 0, \dots, n$.

Géométrique(p) avec $p \in [0, 1]$: $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^k$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Poisson(λ) avec $\lambda > 0$: $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Lois discrètes usuelles

Exercice 1 Donner l'expression et "tracer" les fonctions de répartition de loi de Bernoulli de paramètre $2/3$ puis de loi géométrique de paramètre $3/4$.

Exercice 2

1. Rappeler la formule du binôme de Newton.
2. En déduire que la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$ définit bien une loi de probabilité puis calculer sa moyenne et sa variance.
3. Rappeler le comportement des séries $\sum_{n \geq 0} a^n$, $\sum_{n \geq 1} na^{n-1}$ et $\sum_{n \geq 2} n(n-1)a^{n-2}$ lorsque $|a| < 1$.
4. En déduire que la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ définit bien une loi de probabilité puis calculer sa moyenne et sa variance.

Exercice 3 Au cours d'une expérience un certain événement E se réalise avec une probabilité $p \in]0, 1[$. On répète de façon indépendante l'expérience jusqu'à obtenir r fois E . Soit X la variable aléatoire associée au nombre de réalisations de E^c . Déterminer la loi de X .

Exercice 4 Calculer la fonction génératrice de X lorsque X est une variable aléatoire

1. de loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$;
2. de loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$;
3. de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$;
4. de loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.
5. En déduire l'espérance et la variance de X dans chacun des cas.

Inégalités

Exercice 5

1. Soit X une variable aléatoire intégrable. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}_*^+$

$$\text{(Markov)} \quad \mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{a}.$$

2. En déduire que si X est de carré intégrable alors pour tout $a \in \mathbb{R}_*^+$

$$\text{(Tchebycheff)} \quad \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\text{Var}(X)}{a^2}.$$

Exercice 6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On extrait n fois avec remise une boule dans une urne composée de 2 boules vertes et 6 boules blanches. Soit X_n la variable aléatoire associée au nombre de boules vertes obtenues lors des n tirages. On pose $F_n = X_n/n$.

1. Donner la loi de X_n . En déduire l'espérance et la variance de X_n puis de F_n .
2. On suppose dans cette question que $n = 10\,000$. A l'aide de l'exercice précédent, donner une borne inférieure pour la probabilité de l'événement $\{F_n \in]0.22, 0.26[\}$.
3. Donner une estimation du nombre minimal n de tirages nécessaires pour que la probabilité de l'événement $\{F_n \in]0.22, 0.26[\}$ soit au moins 0.99.

CORRECTION FEUILLE DE TD 2

Exercice 1 Si X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = 2/3$, X est à valeurs dans $\{0, 1\}$, donc $F_X(x) = P(X \leq x) = 0$ si $x < 0$ et $F_X(x) = 1$ si $x \geq 1$. De plus, si $0 \leq x < 1$, $F_X(x) = P(X \leq x) = P(X = 0) = 1 - p = 1/3$. Faire le dessin correspondant.

Soit X une variable aléatoire de la loi géométrique de paramètre $p = 3/4$. Comme X est à valeurs dans \mathbb{N}^* , on a $F_X(x) = 0$ pour tout $x < 1$. De plus, $F_X(x) = P(X = 1) = 3/4$ si $x \in [1, 2[$, $F_X(x) = P(X = 1) + P(X = 2) = 3/4 + 3/16 = 15/16$ si $x \in [2, 3[$, $F_X(x) = F_X(2) + P(X = 3) = 15/16 + 3/64$ si $x \in [3, 4[$, ...

Exercice 2 1. Pour x, y réels (ou dans un quelconque anneau commutatif) et $n \in \mathbb{N}$, la formule du binôme de Newton s'écrit $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k}$.

2. Pour vérifier que $P(X = k) = a_k$ (où $k \in \mathbb{N}$ et $a_k \in \mathbb{R}$) définit bien une mesure de probabilités sur \mathbb{N} , il faut vérifier $a_k \geq 0$ et $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$. Pour la loi binomiale de paramètres n et p , la positivité est évidente, et la seconde condition résulte de la formule du binôme : $\sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = (p + 1 - p)^n = 1$.

À l'aide des formules $k C_n^k = n C_{n-1}^{k-1}$ et $k(k-1) C_n^k = n(n-1) C_{n-2}^{k-2}$ (la première se vérifie via la définition des C_n^k et la deuxième se déduit de la première), et de la formule du binôme, on calcule :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = n \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} p^k (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k p^k (1-p)^{n-1-k} = np$$

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = \sum_{k=2}^n k(k-1) C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=2}^n n(n-1) C_{n-2}^{k-2} p^k (1-p)^{n-k} = n(n-1)p^2,$$

d'où $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)$.

3. Si $a \neq 1$ on a, pour tout n , $\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$. Pour $|a| < 1$, $\lim_n a^{n+1} = 0$,

donc la série géométrique est alors convergente avec $\sum_{k \geq 0} a^k = \frac{1}{1 - a}$. Par propriété de dérivation des séries entières dans leur intervalle ouvert de convergence, on en déduit $\sum_{k \geq 1} k a^{k-1} = \frac{d}{da} \left(\frac{1}{1 - a} \right) = \frac{1}{(1 - a)^2}$ et $\sum_{k \geq 2} k(k-1) a^{k-2} = \frac{d^2}{da^2} \left(\frac{1}{1 - a} \right) = \frac{2}{(1 - a)^3}$.

4. Si pour tout $k \geq 1$ on a $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$, alors $\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X = k) = p \sum_{k \geq 0} (1-p)^k = 1$. Ceci montre que la loi géométrique de paramètre p est bien une loi de probabilités. On calcule :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \geq 1} k \mathbb{P}(X = k) = p \sum_{k \geq 1} k (1-p)^{k-1} = \frac{1}{p}$$

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = \sum_{k \geq 2} k(k-1) \mathbb{P}(X = k) = p(1-p) \sum_{k \geq 2} k(k-1) (1-p)^{k-2} = 2 \frac{1-p}{p^2}$$

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 = 2 \frac{1-p}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

Exercice 3 On a $\Omega = \{E, E^c\}^{\mathbb{N}}$. L'événement $\{E, \dots, E, E^c, \dots, E^c, \dots\}$ où E apparaît r fois et E^c apparaît n fois dans les $r + n$ premiers termes a une probabilité $p^r(1-p)^n$. Pour trouver la probabilité $\mathbb{P}(X = n)$ il faut calculer le nombre de manières de construire des $r + n$ uplets se terminant par E , et contenant r fois E . C'est donc le nombre de combinaisons de $r-1$ éléments parmi $r+n-1$ puisque un des éléments ainsi que sa position est imposée, soit encore C_{r+n-1}^{r-1} . Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\mathbb{P}(X = n) = C_{n+r-1}^{r-1} p^r (1-p)^n$. Il s'agit de la loi binomiale négative de paramètres $r \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$.

Exercice 4 1. Loi de Bernoulli de paramètre p . On a, pour $s \in \mathbb{R}$,

$$G_X(s) = E[X^s] = (1-p) + ps,$$

donc $G'_X(s) = p$ et $G''_X(s) = 0$. Il suit $G'_X(1) = p$ et $G''_X(1) = 0$. Par conséquent (cf. feuille 1, exercice 5 et remarque à la fin du corrigé), $\mathbb{E}(X) = p$ et $\text{Var}(X) = p - p^2 = p(1-p)$.

2. Loi binomiale de paramètres n et p . Pour $s \in \mathbb{R}$, la formule du binôme donne :

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^n s^k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k (sp)^k (1-p)^{n-k} = (1-p + sp)^n.$$

On obtient $G'_X(s) = np(1-p + sp)^{n-1}$ et $G''_X(s) = n(n-1)p^2(1-p + sp)^{n-2}$, d'où $G'_X(1) = np$ et $G''_X(1) = n(n-1)p^2$.

3. Loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Rappelons que dans ce cas $\mathbb{P}(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Le développement en série de l'exponentielle $e^\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}$ (et le fait que $\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \geq 0$) montre qu'il s'agit bien d'une probabilité. Ce même développement fournit, pour tout $s \in \mathbb{R}$:

$$G_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{\lambda s} e^{-\lambda} = e^{\lambda(s-1)},$$

donc $G'_X(s) = \lambda e^{\lambda(s-1)}$ et $G''_X(s) = \lambda^2 e^{\lambda(s-1)}$. $G'_X(1) = \lambda$ et $G''_X(1) = \lambda^2$ impliquent $\mathbb{E}(X) = \lambda$ et $\text{Var}(X) = \lambda$.

4. Loi géométrique de paramètre p . On a, pour tout $s \in]-\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p}[$,

$$G_X(s) = \sum_{k=1}^{\infty} s^k (1-p)^{k-1} p = \frac{sp}{1-s(1-p)}.$$

Pour ces valeurs de s , on en déduit que $G'_X(s) = \frac{p}{(1-s(1-p))^2}$ et $G''_X(s) = \frac{2p(1-p)}{(1-s(1-p))^3}$.

En particulier, $G'_X(1) = \frac{1}{p}$ et $G''_X(1) = \frac{2(1-p)}{p^2}$, d'où $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$ et $\text{Var}(X) = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{1-p}{p^2}$.

Remarque 1. Pour déduire le calcul de l'espérance et de la variance, on utilise à vrai dire une *reciproque* partielle de la question 5.3 de la feuille 1. À savoir : si $G'_X(1) < \infty$ (c'est-à-dire, si la série dérivée converge en $s = 1$), alors X est intégrable, et $E(X) = G'_X(1)$. Et si $G''_X(1) < \infty$ (idem pour la série dérivée seconde), alors X est de carré intégrable et $E(X^2) = E(X(X-1)) + E(X) = G''_X(1) + G'_X(1)$. La preuve est quasiment

la même puisque par exemple les propriétés « X est intégrable» et « $G'_X(1) < \infty$ » se traduisent exactement par la même condition de convergence : $\sum_k k\mathbb{P}(X = k) < \infty$.

Remarque 2. Dès que le rayon de convergence de G_X est strictement plus grand que 1 (ce qui est le cas dans les exemples précédents), G_X est de classe \mathcal{C}^∞ en 1, donc X est intégrable, X^2 aussi et, de façon plus générale, X^k est intégrable pour tout k (considérer la dérivée k -ième de G_X).

Exercice 5 Voir page 13 du cours.

Exercice 6 1. X_n est de loi binomiale de paramètres n et $p = 2/8 = 1/4$. Donc $\mathbb{E}(X_n) = n/4$ et $Var(X_n) = 3n/16$. On obtient alors $\mathbb{E}(F_n) = 1/4$ et $Var(F_n) = 3/(16n)$.

2. $\mathbb{P}(F_n \in]0.22, 0.26]) = \mathbb{P}(F_n - \mathbb{E}(F_n) \in]-0.03, 0.01]) > \mathbb{P}(|F_n - \mathbb{E}(F_n)| < 0.01)$ donc $\mathbb{P}(F_n \in]0.22, 0.26]) > 1 - \mathbb{P}(|F_n - \mathbb{E}(F_n)| \geq 0.01) \geq 1 - Var(F_n)/0.01^2 = 1 - 3/16 = 13/16$.

3. $\mathbb{P}(F_n \in]0.22, 0.26]) > \mathbb{P}(|F_n - \mathbb{E}(F_n)| < 0.01)$ donc si $\mathbb{P}(|F_n - \mathbb{E}(F_n)| < 0.01) > 0.99$ alors on aura

$\mathbb{P}(F_n \in]0.22, 0.26]) > 0.99$. Il suffit de chercher n tel que $\mathbb{P}(|F_n - \mathbb{E}(F_n)| \geq 0.01) < 0.01$.

Or $\mathbb{P}(|F_n - \mathbb{E}(F_n)| > 0.01) < Var(F_n)/0.01^2$ donc $n > 3/(16 \cdot 0.01^3) = 187500$.

FEUILLE DE TD 3

Exercice 1 *Fonctions indicatrices*

Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace de probabilité discret. Si $A \subset \Omega$ est un événement, on note $\mathbf{1}_A : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ la fonction indicatrice de A :

$$\text{pour tout } \omega \in \Omega, \quad \mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A. \end{cases}$$

1. Pour des événements A et B , exprimer $\mathbf{1}_{A^c}$ et $\mathbf{1}_{A \cap B}$ en fonction de $\mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_B$.
2. Vérifier que, pour tout événement A , $\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A]$.
3. Montrer que si X est une variable aléatoire intégrable à valeurs dans \mathbb{N} , alors :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n).$$

Indépendance

Exercice 2 *Indépendance entre 3 événements*

On jette deux dés (non pipés), l'un après l'autre. On note respectivement A , B et C les événements «Le chiffre du premier dé est pair», «Le chiffre du deuxième dé est pair» et «Les deux chiffres ont même parité».

1. Montrer que les événements A , B et C sont deux à deux indépendants.
2. Montrer que A , B et C ne sont pas indépendants dans leur ensemble.

Exercice 3 *Indépendance et passage au complémentaire*

Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace de probabilité discret, et A_1, \dots, A_n des événements indépendants.

1. Montrer que A_1^c, A_2, \dots, A_n sont indépendants aussi.
2. En déduire par récurrence la propriété plus générale : pour tous $B_1 \in \{A_1, A_1^c\}, \dots, B_n \in \{A_n, A_n^c\}$, les événements B_1, \dots, B_n sont indépendants.
3. Démontrer que les événements A_1, \dots, A_n sont indépendants si, et seulement si les variables aléatoires $\mathbf{1}_{A_1}, \dots, \mathbf{1}_{A_n}$ sont indépendantes.

Exercice 4 Soit X et Y des variables aléatoires réelles indépendantes, définies sur un espace de probabilité discret (Ω, \mathbb{P}) .

1. Montrer que, pour toutes fonctions f et g de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , $f(X)$ et $g(Y)$ sont des variables aléatoires indépendantes.
2. On suppose X et Y intégrables. Montrer que XY est intégrable et $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.
3. On suppose X^2 et Y^2 intégrables. Montrer que $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$.
4. Généraliser ces résultats à n variables aléatoires X_1, \dots, X_n indépendantes.

Exercice 5 Si X est une variable aléatoire indépendante de Y et si Y est indépendante de Z , est-ce que X est indépendante de Z ?

Lois usuelles et indépendance

Exercice 6 *Interprétation des lois usuelles*

On considère une suite d'expériences indépendantes dont l'issue est un succès avec probabilité p et un échec avec probabilité $1 - p$.

1. Montrer que le nombre de succès parmi les n premières expériences suit une loi binomiale de paramètres n et p .
2. Montrer que l'instant où a lieu le premier succès suit une loi géométrique de paramètre p .

Exercice 7 Soit X, Y des variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p_X et p_Y . On définit $Z = \min(X, Y)$.

1. Calculer les fonctions de répartition de X, Y, Z .
2. En déduire la loi de Z .

Conditionnement

Exercice 8 *Formule de Bayes*

1. Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace de probabilité discret, et (H_1, \dots, H_n) une partition de Ω en n événements de probabilité non nulle. Montrer que, pour $i = 1, \dots, n$, si A est un événement de probabilité non nulle :

$$\mathbb{P}(H_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_i)\mathbb{P}(H_i)}{\sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A|H_j)\mathbb{P}(H_j)}.$$

2. Une maladie M affecte une personne sur 1000 dans une population donnée. On dispose d'un test sanguin qui détecte M avec une fiabilité de 99% lorsque cette maladie est effectivement présente. Cependant, on obtient aussi un résultat faussement positif pour 0,2% des personnes saines testées. Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement malade lorsque son test est positif?

Exercice 9

Soient X_1 et X_2 des variables aléatoires, indépendantes, de loi de Poisson de paramètres λ_1 et λ_2 respectivement.

1. Calculer la loi de $X_1 + X_2$.
2. Calculer la loi conditionnelle de X_1 sachant $X_1 + X_2$. Identifier une loi connue.

CORRECTION DE LA FEUILLE DE TD 3

Exercice 1 *Fonctions indicatrices*

1. On a facilement $\mathbf{1}_{A^c} = 1 - \mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.
2. D'après les définitions,

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_A] = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{1}_A(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}(A).$$

3. On remarque que : pour tout $\omega \in \Omega$,

$$X(\omega) = \sum_{k=1}^{X(\omega)} 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X \geq k\}}(\omega),$$

d'où par théorème de convergence dominée (les sommes partielles sont inférieures à X , intégrable) (ou convergence monotone) :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{X \geq k\}}] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq k).$$

Indépendance

Exercice 2 *Indépendance entre 3 événements*

L'espace des épreuves est $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$, où la première composante représente la valeur du premier dé, et la seconde celle du second dé. Les couples de résultats sont équiprobables, donc on munit Ω de la loi uniforme \mathbb{P} .

1. On a $\text{Card}(A) = 3 \cdot 6 = 18 = \text{Card}(B)$ et $\text{Card}(C) = 6 \cdot 3 = 18$ donc $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = 1/2$. D'autre part, on voit que $A \cap C = \{\text{deux lancers pairs}\} = B \cap C = A \cap B$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = (3 \cdot 3)/36 = 1/4$.
2. On a : $A \cap B \cap C = A \cap B$ donc $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 1/4 \neq 1/8 = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$.

Exercice 3 *Indépendance et passage au complémentaire*

1. Pour tous $2 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1^c \cap A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) &= \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = (1 - \mathbb{P}(A_1))\mathbb{P}(A_{i_2}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_n}) \\ &= \mathbb{P}(A_1^c)\mathbb{P}(A_{i_2}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_k}) \end{aligned}$$

et $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_k})$.

2. On raisonne par récurrence : on sait que les événements B_1, A_2, \dots, A_n sont indépendants grâce à la question 1 (ou trivialement si $B_1 = A_1$), donc on peut leur appliquer la question 1 pour voir que $B_1, B_2, A_3, \dots, A_n$ sont indépendants, etc.
3. Supposons les variables aléatoires $\mathbf{1}_{A_1}, \dots, \mathbf{1}_{A_n}$ indépendantes. Alors, pour tous $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) &= \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}}] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_{i_1}}] \cdots \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_{i_k}}] \\ &= \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_k}) \end{aligned}$$

d'où l'indépendance des événements. Supposons réciproquement les événements A_1, \dots, A_n indépendants. Pour tout événement A , lorsque x parcourt \mathbb{R} , l'événement $\{\mathbf{1}_A = x\}$ est ou bien égal à A ou à A^c . Il apparaît donc que l'événement $\{A_{i_1} = c_1, \dots, A_{i_k} = c_k\}$ est de la forme de ceux considérés dans l'exercice 3, d'où :

$$\mathbb{P}(\mathbf{1}_{A_{i_1}} = c_1, \dots, \mathbf{1}_{A_{i_k}} = c_k) = \mathbb{P}(B_{i_1}) \cdots \mathbb{P}(B_{i_k}) = \mathbb{P}(\mathbf{1}_{A_{i_1}} = c_1) \cdots \mathbb{P}(\mathbf{1}_{A_{i_k}} = c_k),$$

où $B_i = A_i$ si $c_i = 1$, $B_i = A_i^c$ si $c_i = 0$. D'où l'indépendance de $\mathbf{1}_{A_1}, \dots, \mathbf{1}_{A_n}$.

Exercice 4

1. On a, pour $a, b \in \mathbb{R}$ (ou $\in f(X(\Omega))$ et $g(Y(\Omega))$) :

$$\mathbb{P}(f(X) = a, g(Y) = b) = \mathbb{P}(X \in f^{-1}(a), Y \in g^{-1}(b)) = \mathbb{P}(X \in f^{-1}(a))\mathbb{P}(Y \in g^{-1}(b)) = \mathbb{P}(f(X) = a)\mathbb{P}(g(Y) = b)$$

2. On a : (on peut changer l'énoncé et prendre X et Y à valeurs dans \mathbb{Z} pour coller au cours)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|XY|] &= \sum_{k \in X(\Omega), l \in Y(\Omega)} |kl| \mathbb{P}(X = k, Y = l) = \sum_{k \in X(\Omega), l \in Y(\Omega)} |kl| \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = l) \\ &= \sum_{k \in X(\Omega)} |k| \mathbb{P}(X = k) \sum_{l \in Y(\Omega)} |l| \mathbb{P}(Y = l) = \mathbb{E}[|X|] \mathbb{E}[|Y|] < \infty \end{aligned}$$

donc XY est intégrable, et en refaisant le calcul sans les valeurs absolues (justifié par Fubini), on trouve $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \mathbb{E}[Y]$.

3. On a :

$$\text{Var}(X+Y) = \mathbb{E}[(X+Y)^2] - \mathbb{E}[X+Y]^2 = \mathbb{E}[X^2 + Y^2 + XY] - (\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y])^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 + \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 + \mathbb{E}[XY]$$

en développant et en utilisant la question précédente.

4. Pas de vraie difficulté pour généraliser, sinon dans l'écriture. On remarque que la question ci-dessus requiert juste l'indépendance des variables 2 à 2.

Exercice 5 Prendre un contre-exemple.

Lois usuelles et indépendance

Exercice 6 *Interprétation des lois usuelles*

On considère une suite de variables aléatoires X_1, X_2, \dots indépendantes, telle que $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$ (on représente le succès par 1) et $\mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - p$ (et l'échec par 0).

1. On note S le nombre de succès parmi les n premières expériences. Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S = k) &= \sum_{S \subset \{1, \dots, n\}, \text{Card}(S)=k} \mathbb{P}(\forall i \in S, X_i = 1, \forall i \notin S, X_i = 0) \\ &= \sum_{S \subset \{1, \dots, n\}, \text{Card}(S)=k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \end{aligned}$$

2. L'instant N de premier succès est tel qu'il est précédé de $N - 1$ échecs, d'où, pour $k \geq 1$:

$$\mathbb{P}(N = k) = \mathbb{P}(X_1 = 0, \dots, X_{k-1} = 0, X_k = 1) = (1 - p)^k p.$$

Autrement dit, N suit la loi géométrique de paramètre p .

Exercice 7 Soit k un entier non nul.

1. $\mathbb{P}(X \leq k) = 1 - \mathbb{P}(X > k) = (1 - p_X)^k$ donc $F_X(x) = 1 - (1 - p_X)^k$ si $x > 0$ et $k \leq x < k + 1$; 0 sinon.

De même $F_Y(y) = 1 - (1 - p_Y)^k$ si $y > 0$ et $k \leq y < k + 1$; 0 sinon.

$\mathbb{P}(Z \leq z) = 1 - \mathbb{P}(Z > z) = 1 - \mathbb{P}(X > z, Y > z) = 1 - \mathbb{P}(X > z)\mathbb{P}(Y > z) = 1 - (1 - p_X)^k(1 - p_Y)^k$ si $z > 0$ et $k \leq z < k + 1$; 1 sinon.

2. Z est de loi Géométrique de paramètre $p_Z = 1 - (1 - p_X)(1 - p_Y) = p_X + p_Y - p_X p_Y$.

Conditionnement

Exercice 8 Formule de Bayes.

1. On a, en remarquant que A est la réunion disjointe des événements $A \cap H_1, \dots, A \cap H_n$:

$$\mathbb{P}(H_i|A) = \frac{\mathbb{P}(H_i \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap H_i)}{\sum_j \mathbb{P}(A \cap H_j)} = \frac{\mathbb{P}(A|H_i)\mathbb{P}(H_i)}{\sum_j \mathbb{P}(A|H_j)\mathbb{P}(H_j)}.$$

2. Ici, Ω est la population considérée, dont une partie E est atteinte par la maladie M , et dont une partie T a une réaction positive au test. Par hypothèse, $\mathbb{P}(E) = 1/1000$, $\mathbb{P}(T|E) = 0,99$ et $\mathbb{P}(T|E^c) = 0,002$, d'où (cas particulier de la formule de Bayes pour la partition de Ω en E et E^c) :

$$\mathbb{P}(E|T) = \frac{P(E)P(T|E)}{P(E)P(T|E) + P(E^c)P(T|E^c)} = \frac{1/1000 \cdot 0,99}{1/1000 \cdot 0,99 + 0,999 \cdot 2/1000} \simeq 0,33$$

Ainsi, le test a deux chances sur trois de donner une réponse positive à une personne saine, ce qui est loin d'être négligeable !

Exercice 9

1. Si X (resp. Y) suit la loi de Poisson de paramètre λ_1 (resp. λ_2), alors :

$$G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s) = e^{\lambda_1(1-s)}e^{\lambda_2(1-s)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(1-s)},$$

donc $X + Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

Méthode directe : $\mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{j=0}^k \mathbb{P}(X = j)\mathbb{P}(Y = k - j) = \sum_{j=0}^k \frac{\lambda_1^j}{j!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_2^{k-j}}{(k-j)!} e^{-\lambda_2}$
 $= (\lambda_1 + \lambda_2)^k / k! e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}$. C'est bien la loi de Poisson de paramètre la somme des paramètres de X et Y .

$$\begin{aligned} 2. \mathbb{P}(X = j|X+Y = k) &= \frac{\mathbb{P}(X = j)\mathbb{P}(Y = k - j)}{\mathbb{P}(X + Y = k)} = \frac{\lambda_1^j}{j!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_2^{k-j}}{(k-j)!} e^{-\lambda_2} \frac{k!}{(\lambda_1 + \lambda_2)^k e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}} \\ &= C_k^j \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^j \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{k-j} \end{aligned}$$

Par conséquent, la loi de X sachant $X+Y = k$ suit la binomiale de paramètre $(k, \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2})$.

FEUILLE DE TD 4

Somme de v.a. indépendantes et fonction génératrice

Exercice 1 Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace de probabilité discret, et X, Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur Ω , à valeurs dans \mathbb{N} .

1. Exprimer la loi de $X + Y$ en fonction de celles de X et Y .
2. Montrer que, pour tout $s \in [-1, 1]$, $G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)$. (on pourra donner deux preuves)
3. Généraliser ce qui précède au cas de n variables aléatoires indépendantes X_1, \dots, X_n .
4. Quelle est la loi de la somme de n variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p ? Retrouver alors l'espérance et la variance de cette loi.
5. Quelle est la loi de la somme de :
 - deux variables aléatoires indépendantes de loi binomiale de paramètres (n, p) et (m, p) ?
 - deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètre λ et μ ?

Exercice 2 *Dés truqués*

1. Quelle est la fonction génératrice de la loi uniforme sur $\{2, \dots, 12\}$?
2. Soit X_1 et X_2 des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{1, \dots, 6\}$. En étudiant les racines du polynôme $G_{X_1}G_{X_2}$, montrer que la loi de $X_1 + X_2$ ne peut pas être la loi uniforme sur $\{2, \dots, 12\}$.
Indication : on remarquera que $G_{X_i}(s) = s\varphi_i(s)$ où φ_i est un polynôme à coefficients réels de degré impair, qui admet donc une racine réelle (pourquoi ?).
3. Peut-on piper deux dés indépendants de façon à rendre toutes les sommes entre 2 et 12 équiprobables ?

Lois continues usuelles

Exercice 3 Calculer l'espérance et la variance de X lorsque X est une variable aléatoire

1. de loi uniforme $\mathcal{U}([a, b])$ sur l'intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$;
2. de loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$ de paramètre $m \in \mathbb{R}, \sigma > 0$;
3. de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$.

Exercice 4 Soit X une variable aléatoire de densité $f(x) = \frac{a}{\pi(a^2+x^2)}$ avec $a > 0$. La loi de X est appelée loi de Cauchy de paramètre a .

Vérifier que f est bien une densité. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la variable $|X|^\alpha$ est-elle intégrable ?

Exercice 5 Une variable aléatoire positive X est *sans mémoire* si

$$\mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \mathbb{P}(X > s), \quad \forall t, s \geq 0.$$

Montrer qu'une variable aléatoire positive dont la loi admet une densité est sans mémoire si, et seulement si elle suit une loi exponentielle.

Exercice 6 Soit X une variable aléatoire réelle.

1. Supposons que X a pour densité f . Quel lien y a-t-il entre f et la fonction de répartition F_X ?
2. Réciproquement, donner une condition sur F_X pour que la loi de X admette une densité.
3. Soit r un réel > 0 . On suppose X à valeurs positives. Montrer que

$$\mathbb{E}[X^r] = \int_0^{\infty} r x^{r-1} \mathbb{P}(X > x) dx,$$

où les deux membres sont finis ou infinis. On pourra donner une preuve dans le cas à densité (à l'aide de ce qui précède), et une preuve dans le cas général (dans l'esprit de la question 1.3 de la feuille 3).

Exercice 7 Soit X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$.

1. Calculer la loi de $\max_{i=1, \dots, n} X_i$. (*Indication : calculer la fonction de répartition.*)
2. Calculer la loi de $\min_{i=1, \dots, n} X_i$.

Somme de v.a. indépendantes et fonction génératrice

Exercice 1 Somme de v.a. indépendantes et fonctions génératrices

1. L'événement $\{X + Y = n\}$ est la réunion disjointe des $\{X = k, Y = l\}$ pour $k, l \in \mathbb{N}$ tels que $k + l = n$, d'où :

$$\mathbb{P}(X + Y = n) = \sum_{k, l \in \mathbb{N}, k+l=n} \mathbb{P}(X = k, Y = l) = \sum_{k+l=n} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = l),$$

soit : $\mu_{X+Y}(\{n\}) = \sum_{k=1}^n \mu_X(\{k\})\mu_Y(\{n-k\})$.

2. On reconnaît dans la formule précédente l'expression des coefficients de la série entière produit de G_X et G_Y . Comme ces deux séries entières convergent sur $[-1, 1]$, on a donc, pour tout $s \in [-1, 1]$, $G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)$. Autre méthode : X et Y sont indépendantes, donc s^X et s^Y aussi, et celles-ci sont intégrables pour $s \in [-1, 1]$, d'où :

$$G_{X+Y}(s) = E[s^{X+Y}] = E[s^X s^Y] = E[s^X]E[s^Y] = G_X(s)G_Y(s).$$

3. La généralisation à n variables ne pose pas de problème.

4. Soit X_1, \dots, X_n des variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p . On a $G_{X_1}(s) = \dots = G_{X_n}(s) = p + (1-p)s$, d'où, pour tout s :

$$G_{X_1+\dots+X_n}(s) = G_{X_1}(s) \cdots G_{X_n}(s) = (p + (1-p)s)^n = G_S(s),$$

où S est une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et p . Comme la fonction génératrice caractérise la loi, $Y = X_1 + \dots + X_n$ suit une loi binomiale de paramètres n et p . En particulier, l'espérance de cette loi est : $E[Y] = E[X_1 + \dots + X_n] = \sum_{i=1}^n E[X_i] = np$, et sa variance est (vu l'indépendance) : $\text{Var}(Y) = \text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = np(1-p)$. Remarquons que l'exercice précédent donnait déjà la loi binomiale comme somme de Bernoullis indépendantes.

5.

– Si X (resp. Y) suit la loi binomiale de paramètres n et p (resp. m et p), alors :

$$G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s) = (p + (1-p)s)^n (p + (1-p)s)^m = (p + (1-p)s)^{m+n},$$

donc $X + Y$ suit la loi binomiale de paramètres $m + n$ et p (ce qui se comprend bien par l'interprétation précédente).

– Si X (resp. Y) suit la loi de Poisson de paramètre λ (resp. μ), alors :

$$G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s) = e^{\lambda(1-s)} e^{\mu(1-s)} = e^{(\lambda+\mu)(1-s)},$$

donc $X + Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Exercice 2 Dés truqués

1. Soit X une variable de loi uniforme sur $\{2, \dots, 12\}$. Pour $s \in [-1, 1]$ (ou \mathbb{R}),

$$G_X(s) = \sum_{i=2}^{12} \frac{1}{11} s^i = \frac{s}{11} \frac{1 - s^{11}}{1 - s}.$$

2. Supposons que l'on ait $G_{X_1} G_{X_2} = G_X$ (donné ci-dessus). Remarquons que, pour $i = 1, 2$,

$$G_{X_i}(s) = \sum_{j=1}^6 \mathbb{P}(X_i = j) s^j = s \varphi_i(s),$$

où φ_i est un polynôme, à coefficients réels, et que la condition $\mathbb{P}(X_1 + X_2 = 12) = 1/11$ implique $1/11 = \mathbb{P}(X_1 = 6, X_2 = 6) = \mathbb{P}(X_1 = 6) \mathbb{P}(X_2 = 6)$ et donc que φ_i est de degré 5, impair. Par un argument de valeurs intermédiaires, les polynômes φ_1 et φ_2 ont donc chacun au moins une racine réelle. Or :

$$11s\varphi_1(s)\varphi_2(s) = \frac{1 - s^{11}}{1 - s},$$

et le polynôme du membre de droite a pour racines les racines onzièmes de l'unité autres que 1, dont aucune n'est réelle : contradiction.

3. Tant que les dés sont indépendants, on ne peut donc les piper (i.e. modifier leur loi) de façon à rendre toutes les sommes entre 2 et 12 équiprobables.

Lois continues usuelles

Exercice 3 UNIFORME la densité est $\frac{\mathbf{1}_{[a,b]}(x)}{b-a}$ et la f.r. est $F(x) = \frac{x-a}{b-a} \mathbf{1}_{[a,b]}(x) + \mathbf{1}_{[b,\infty]}(x)$.

Pour tout $r > 0$, la fonction $|x|^r f_X(x)$ est bornée par $\frac{\max(|a|, b)^r}{b-a}$ intégrable sur $[a, b]$ donc

X admet des moments de tout ordre. En particulier $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$ et $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

On peut également noter que si $X \sim U(0, 1)$ alors $Y = (b-a)X + a \sim U(a, b)$. On en déduit facilement les moments de Y à partir de ceux de X .

NORMALE La densité est $f_{m,\sigma}(x) = \frac{\exp(-(x-m)^2/(2\sigma^2))}{\sqrt{2\pi}\sigma}$, la fonction de répartition n'a pas d'expression explicite, seulement la forme intégrale $\int_{-\infty}^x f_{m,\sigma}(y) dy$.

C'est bien une loi de proba : $I = \int_{-\infty}^{\infty} f_{m,\sigma}(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_{0,1}(y) dy = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ par

changement de variable $x \rightarrow \frac{x-m}{\sigma}$, la parité puis le changement de variable $x \rightarrow \sqrt{2}x$.

D'autre part :

$$\left(\int_{\mathbb{R}^+} e^{-x^2} dx \right)^2 = \iint_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} e^{-x^2 - y^2} dx dy = \iint_{\mathbb{R}^+ \times [0, \pi/2]} e^{-r^2} r dr d\theta = \left(\int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr \right) \left(\int_0^{\pi/2} d\theta \right) = 1/2 \times \pi/2 = \pi/4. \text{ Donc } I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi/4} = 1. \text{ Cette loi admet des moments de tous les ordres.}$$

En effet, pour tout $r > 0$, on a $|x|^r f_{m,\sigma}(x)$ est intégrable.

On peut également montrer que si $X \sim N(m, \sigma)$ alors $Y = \frac{X - m}{\sigma} \sim N(0, 1)$. On en déduit facilement que $\mathbb{E}(X) = m + \mathbb{E}(Y)\sigma$ et $Var(X) = \sigma^2 Var(Y)$. Il suffit de calculer les moments de la $N(0, 1)$. Par parité, on a que pour tout m entier impair, $\mathbb{E}(Y^m) = 0$. Soit maintenant un entier pair. On a $\mathbb{E}(Y^m) = \int y^{m-1} y f_{0,1}(y) dy = (m-1) \int y^{m-2} f_{0,1}(y) dy$ en intégrant par parties. Donc on obtient la relation $\mathbb{E}(Y^m) = (m-1)\mathbb{E}(Y^{m-2})$ lorsque m est pair.

Comme $\mathbb{E}(Y^2) = 1$ on obtient $\mathbb{E}(Y^m) = 1 \dots 3 \dots (m-1) = \frac{(2k)!}{2^k k!}$ en posant $m = 2k$.

EXPONENTIELLE La densité est $f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x \in \mathbb{R}_+}$. Donc la f.r. est $F_\lambda(x) = 1 - e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x \in \mathbb{R}_+}$. La loi exponentielle sert à modéliser les durées de vie. On a $\mathbb{E}(X) = 1/\lambda$ et $Var(X) = 1/\lambda^2$.

Exercice 4

1. $\frac{a|x|^\alpha}{\pi(a^2+x^2)}$ est intégrable ssi $\alpha - 2 < -1$, i.e. $\alpha < 1$.

2. $\int e^{-|t|} e^{i\xi t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{-t(1+i\xi)} dt + \int_0^\infty e^{-t(1+i\xi)} dt = \frac{1}{1-i\xi} + \frac{1}{1+i\xi} = \frac{2}{1+\xi^2}$.

3. On déduit de la question précédente et de la transformée de fourier inverse que $e^{-|t|} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{2}{1+\xi^2} e^{i\xi t} d\xi$. En particulier, la fonction caractéristique de Y une variable de loi de cauchy de paramètre 1 est $e^{-|t|}$.

De plus, il faut noter que si X est de loi cauchy de paramètre a alors $Y = X/a$ est de loi cauchy de paramètre 1.

En effet, $\mathbb{P}(X/a \leq x) = \mathbb{P}(X \leq ax) = \int_{-\infty}^{ax} \frac{a}{\pi(a^2+x^2)} dx = \int_{-\infty}^x \frac{a}{\pi(a^2+(ay)^2)} a dy = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\pi(1+y^2)} dy$.
 $\mathbb{E}(e^{itX}) = \mathbb{E}(e^{itaa^{-1}X}) = \mathbb{E}(e^{itaY}) = e^{-|ta|} = e^{-a|t|}$.

Exercice 5 Soit f la densité de notre variable et posons $\bar{F}(x) = 1 - F(x) = \int_x^\infty f(t) dt$. \bar{F} est différentiable avec dérivée $\bar{F}'(x) = -f(x)$. La propriété "sans mémoire" s'écrit $\bar{F}(s+t) = \bar{F}(t)\bar{F}(s)$. Dérivée cette equation par rapport à t en $t = 0$ donne l'equation différentielle

$$\bar{F}'(s) = -f(0)\bar{F}(s)$$

qui a comme solution $\bar{F}(s) = ce^{-f(0)s}$. Donc $f(t) = cf(0)e^{-f(0)t}$ et $c = 1$ est déterminé par la normalisation. On obtient donc les lois exponentielles.

Exercice 6 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^+ de densité f et $r > 0$.

$$\int_0^\infty r x^{r-1} \mathbb{P}(X > x) dx = \int_0^\infty \int_y^\infty r x^{r-1} f(y) dy dx = \int_0^\infty \int_0^y r x^{r-1} f(y) dx dy = \int_0^\infty x^r f(y) dy = \mathbb{E}(X^r).$$

On peut justifier l'échange d'intégration dans le cas où $\mathbb{E}(X^r)$ est fini car cette finitude est l'hypothèse dans le Thm de Tonelli.

Si $\mathbb{E}(X^r)$ est fini alors

$$\mathbb{E}(X^r) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x^r F\{dx\} = -b^r(1 - F(b)) + \int_0^b r b^{r-1}(1 - F(x)) dx$$

en appliquant avec $G = 1 - F$ la formule

$$\int_a^b u(x) G\{dx\} = u(b)G(b) - u(a)G(a) - \int_a^b u'(x)G(x) dx.$$

On sait que $\lim \int x^r F\{dx\}$ finie donc $\int_b^\infty x^r F\{dx\} \geq b^r(1 - F(b))$ permet de déduire que la limite du terme de droite vaut 0. Il suit le résultat. On a d'autre part $\int_0^b x^r F\{dx\} \leq \int_0^b rb^{r-1}(1 - F(x))dx$ car pour b positif on a $b^r(1 - F(b))$ positif. Donc lorsque $E(X^r)$ est infini alors il en est de même de $\int_0^\infty rb^{r-1}(1 - F(x))dx$.

Exercice 7 Pour une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, on a une densité $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{x>0}$ et une fonction de répartition $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ si $x > 0$ et $F(x) = 0$ sinon. Il suit $\mathbb{P}(\max_{i=1,\dots,n} X_i \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x)^n = (1 - e^{-\lambda x})^n$. D'autre part, $\mathbb{P}(\min_{i=1,\dots,n} X_i \leq x) = 1 - \mathbb{P}(\min_{i=1,\dots,n} X_i > x) = 1 - \mathbb{P}(X > x)^n = 1 - e^{-n\lambda x}$.

Exercice 5 *L'inégalité de Jensen*

Soit $f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe définie sur un intervalle E qui contient les valeurs d'une variable aléatoire X . On suppose que X et $f(X)$ sont intégrables. Montrer que

$$f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(f(X)).$$

Montrer que si f est strictement convexe, alors l'égalité $f(\mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(f(X))$ implique que X est constante sur un événement presque sûr (c'est-à-dire de mesure 1 pour \mathbb{P}).

Exercice 6 Soit Ω un ensemble fini.

L'entropie d'une probabilité P sur Ω est $H(P) = - \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) \log_2 P(\{\omega\})$, où \log_2 est

le logarithme en base 2 et on adopte la convention $0 \log_2 0 = 0$. Pour P, Q probabilités sur Ω avec $Q(\{\omega\}) > 0$ pour tout $\omega \in \Omega$, leur entropie relative est $D(P||Q) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) \log_2 \left(\frac{P(\{\omega\})}{Q(\{\omega\})} \right)$.

1. Montrer à l'aide de l'inégalité de Jensen que D est positive et que $D(P||Q) = 0$ implique $P = Q$.

2. En déduire que, parmi les probabilités sur Ω , l'entropie est maximale pour la loi uniforme sur Ω et uniquement pour celle-ci.

Entropie

Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace de probabilité fini. L'entropie (sur la base b) de la distribution \mathbb{P} est la valeur

$$H_b(\mathbb{P}) := - \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) \log_b(\mathbb{P}(\{\omega\}))$$

où $b > 0$ est la base du logarithme. Ici on définit $0 \log_b(0) = 0$.

Remarque : En théorie de l'information on utilise surtout $b = 2$, c'est l'entropie binaire qu'on va noter H . Autrement dit, l'entropie binaire H est l'espérance de la variable aléatoire $Z(\omega) = -\log_2(\mathbb{P}(\{\omega\}))$. L'entropie binaire de la loi μ_X d'une variable aléatoire finie X est notée $H(\mu_X)$ ou bien $H(X)$.

Exercice 7 On considère un jeu de 32 cartes et la variable aléatoire X définie par

$$X(\text{carte}) = \begin{cases} a & \text{si la carte est noir} \\ b & \text{si la carte est un coeur} \\ c & \text{si la carte est le 7, 8, 9, 10 de carreau} \\ d & \text{pour les autres cartes} \end{cases}$$

où a, b, c, d sont quatre réels distincts.

1. Déterminer $H(X)$.

2. Alice et Bob jouent au jeu suivant : Alice tire une carte C et demande Bob de déterminer la valeur $X(C)$ en posant des questions de type " $X(C)$ appartient-il à A ?" où A est une partie de $\{a, b, c, d\}$. Supposons que Bob choisit les questions " $X(C) = a$?", " $X(C) = b$?" et " $X(C) = c$?" dans cet ordre. Montrer que la valeur moyenne du nombre de questions que Bob à besoin de poser vaut $H(X)$.

Exercice 8 Soit maintenant \mathbb{P} et \mathbb{P}' deux probabilités sur Ω . L'entropie relative notée $D(\mathbb{P}||\mathbb{P}')$ est définie comme l'espérance de la variable $\omega \rightarrow \log_2(\mathbb{P}(\{\omega\})) - \log_2(\mathbb{P}'(\{\omega\}))$ par rapport à \mathbb{P} :

$$D(\mathbb{P}||\mathbb{P}') = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) \log_2\left(\frac{\mathbb{P}(\{\omega\})}{\mathbb{P}'(\{\omega\})}\right).$$

1. Montrer à l'aide de l'inégalité de Jensen que D est positif et que $D(\mathbb{P}||\mathbb{P}') = 0$ implique $\mathbb{P} = \mathbb{P}'$.
2. Soit u la distribution uniforme sur Ω . Montrer que

$$D(\mathbb{P}||u) = H(u) - H(\mathbb{P}).$$

3. En déduire que l'entropie binaire d'une distribution sur Ω prend ses valeurs entre 0 et $\log_2 |\Omega|$ et que la distribution uniforme est l'unique point maximal de H .

Obtenir une loi à partir d'une autre

Exercice 1 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $E \subset \mathbb{R}$ et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Soit $Y = f(X)$.

1. $\mathbb{P}(Y \in A) = \mathbb{P}(f(X) \in A) = \mathbb{P}(X \in f^{-1}(A))$. En particulier $\mathbb{P}(Y \in \mathbb{R}) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = 1$ et les autres axiomes.

2. Soit ρ_X la densité de X . On regarde le cas où f est injective et C^1 .

$$\mathbb{P}(Y \in A) = \int \mathbf{1}_A(f(t))\rho_X(t)dt = \int \mathbf{1}_A(s) \frac{\rho_X(f^{-1}(s))}{|f'(f^{-1}(s))|} ds.$$

Donc $\rho_Y(s) = \frac{\rho_X(f^{-1}(s))}{|f'(f^{-1}(s))|}$ (ou $\rho_Y = |f^{-1}'|\rho_X \circ f^{-1}$).

3. $\rho_X = \mathbf{1}_{[0,1]}$, $f^{-1}(s) = e^{-s}$, $f^{-1}'(s) = -e^{-s}$. Donc $\rho_Y(s) = e^{-s}\mathbf{1}_{[0,\infty[}(s)$, ce qui est la loi exponentielle de paramètre 1.

4. Réponse : $f(x) = \sigma^{-1}(x - m)$.

5. Par application du théorème du transfert, si g est une fonction mesurable bornée de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , alors

$$\mathbb{E}(g(\sin(U))) = \int_{\mathbb{R}} g(\sin(u))\mu_U(du)$$

et

$$\mathbb{E}(g(\sin(U))) = \int_{\mathbb{R}} g(t)\mu_{\sin(U)}(dt).$$

On sait que U a pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue $1/\pi\mathbf{1}_{[0,\pi]}(u)$. Donc

$$\int_{\mathbb{R}} g(\sin(u))\mu_U(du) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g(\sin(u))du = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} g(\sin(u))du.$$

En posant $t = \sin(u)$ on a $u = \arcsin(t)$ et

$$\mathbb{E}(g(\sin(U))) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 g(t) \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Par conséquent, $\mu_{\sin(U)}(dt) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \mathbf{1}_{[0,1]}(t)dt$, donc la densité de $\sin(U)$ au point t par rapport à la mesure de Lebesgue est $\frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \mathbf{1}_{[0,1]}(t)$.

6. Pour $|U|$ et U^2 , il est plus direct de passer par la fonction de répartition. On trouve que $|U|$ est de loi uniforme sur $[0, 1]$, U^2 a pour densité au point t par rapport à la mesure de Lebesgue $\frac{1}{2\sqrt{t}} \mathbf{1}_{[0,1]}(t)$. Pour la transformation par $h(u) := \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u}$, on peut remarquer que cette fonction est strictement croissante de $] -1, 1[$ vers \mathbb{R} . On peut leur faire appliquer ce qui précède, on obtient une densité au point t donnée par $\frac{2e^{2t}}{(e^{2t} + 1)^2}$.

Exercice 2 Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. La densité de (X, Y) est $\rho(t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(t_1^2+t_2^2)}$. Alors

$$\mathbb{P}\left(\frac{X}{Y} \in A\right) = \int_{\mathbb{R}^2} 1_A\left(\frac{t_1}{t_2}\right) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(t_1^2+t_2^2)} dt_1 dt_2 = \int_{\mathbb{R}^2} 1_A(s) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(s^2+1)t_2^2} ds |t_2| dt_2.$$

Par Fubini on peut évaluer

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(s^2+1)t_2^2} |t_2| dt_2 = \frac{1}{\pi(1+s^2)}$$

ce qui est donc la densité de la loi de Y .

2. Si Z est une variable aléatoire de loi de Cauchy alors sa loi est la même que celle de $\frac{X}{Y}$. Par symétrie $\frac{Y}{X}$ a la même loi que $\frac{X}{Y}$. Donc Z^{-1} a la même loi que Z .

Exercice 3 On trouve $\mathbb{E}[(X+Y)^2] = \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[Y^2] + 2\mathbb{E}[XY] = m^2 + \sigma^2 + m^2 + \sigma^2 + 2m^2 = 4m^2 + 2\sigma^2$.

Quelques inégalités

Exercice 4 Soit X et Y des variables aléatoires positives de carré intégrables sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. La variable aléatoire X^2 est positive ou nulle donc $\mathbb{E}(X^2) = 0$ si et seulement si X^2 est nulle presque sûrement ou encore si et seulement si X est nulle presque sûrement.

2. La fonction $\lambda \rightarrow \mathbb{E}[(X + \lambda Y)^2] = \mathbb{E}(X^2) + 2\lambda\mathbb{E}(XY) + \lambda^2\mathbb{E}(Y^2)$ est un trinôme du second degré toujours positif. Par conséquent son discriminant est négatif : $4\mathbb{E}(XY)^2 - 4\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) \leq 0$ autrement dit, $\mathbb{E}(XY)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$.

3. Comme X est une variable positive on a $\mathbf{1}_{[a\mathbb{E}(X), \infty[}(X) = 1 - \mathbf{1}_{[0, a\mathbb{E}(X)]}(X)$.

Or $\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{[0, a\mathbb{E}(X)]}(X)) \leq a\mathbb{E}(X)$ donc $\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{[a\mathbb{E}(X), \infty[}(X)) \geq \mathbb{E}(X) - a\mathbb{E}(X)$.

4. En utilisant les deux questions précédentes on a :

$$(1-a)^2\mathbb{E}(X)^2 \leq \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{[a\mathbb{E}(X), \infty[}(X))^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{P}(X \geq a\mathbb{E}(X)).$$

Exercice 5 L'inégalité de Jensen A faire

Exercice 6 1. Appliquer Jensen à $-\ln$ et la mesure $\mathbb{P} : \sum P(\omega)(-\log \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}) \geq -\log \sum P(\omega) \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = 0$, ou alors à $x \mapsto x \ln x$ qui est strictement convexe (dérivée $\ln x + 1$ strictement croissante) et à la mesure $Q : \sum \frac{P(\omega)}{Q(\omega)}(-\log \frac{Q(\omega)}{P(\omega)})Q(\omega) \geq (\sum \frac{P}{Q}Q) \ln(\sum \frac{P}{Q}Q) = 0$. Le cas d'égalité correspond à $\frac{P}{Q}$ constant Q -p.s., c'est-à-dire pour tout ω car $Q > 0$. La constante doit être 1 puisque ce sont des probas.

2. Prendre pour Q la mesure uniforme : l'inégalité devient $0 \leq \sum P(\omega) \log \frac{P(\omega)}{1/|\Omega|} = -H(P) + \log |\Omega| = -H(P) + H(u)$ (u proba uniforme), d'où $H(P) \leq H(u)$ et l'égalité donne une égalité dans la question d'avant donc $P = u$.

Entropie

Exercice 7 On considère un jeu de 32 cartes avec la variable aléatoire X où

$$X(\text{carte}) = \begin{cases} a & \text{si la carte est noir} \\ b & \text{si la carte est coeur} \\ c & \text{si la carte est carreau 7, 8, 9, 10} \\ d & \text{pour les autres cartes} \end{cases}$$

où a, b, c, d sont quatre nombres différents.

1. $H(X) = -\sum_{i \in \{a, b, c, d\}} \mathbb{P}(X = i) \log_2(\mathbb{P}(X = i)) = \frac{1}{2} \log_2(2) + \frac{1}{4} \log_2(4) + 2 \frac{1}{8} \log_2(8) = 1,75$.

2. Alice et Bob jouent un jeu : Alice tire une carte C et demande Bob de déterminer la valeur $X(C)$ en posant des questions de type " $X(C)$, appartient-il à A ?" où A est une partie de $\{a, b, c, d\}$. Supposons que Bob choisit les questions " $X(C) = a$ ", " $X(C) = b$ ", " $X(C) = c$ ", dans cet ordre. Déterminer la valeur moyenne de nombre de questions que Bob à besoin de poser.

Soit L la variable aléatoire de nombre de questions Bob a du demander pour connaître le resultat. Alors $\mathbb{E}(L) = \frac{1}{2}1 + \frac{1}{4}2 + \frac{1}{8}3 + \frac{1}{8}3 = 1,75 = H(X)$.

Exercice 8 Voir copie de l'an passe.

FEUILLE DE TD 6

Exercice 1 *Généralisation d'inégalités du cours*

Soit X une variable aléatoire réelle de carré intégrable sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $g(x) \geq b > 0$ pour tout $x \in I \subset \mathbb{R}$. Montrer que

$$\mathbb{P}(X \in I) \leq b^{-1} \mathbb{E}(g(X)).$$

2. Retrouver à l'aide du résultat précédent les inégalités de Markov et Tchebycheff.

3. En utilisant la fonction $g(x) = (x + c)^2$ pour $c > 0$ montrer que si $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\text{Var}(X) = \sigma^2$ alors pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}(X > t) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + t^2}.$$

Exercice 2 *Loi Gamma*

Pour $a > 0$ et $\lambda > 0$, on définit la loi $\gamma_{a,\lambda}$ par sa densité relativement à la mesure de Lebesgue :

$$f_{a,\lambda}(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \exp(-\lambda x) x^{a-1} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

1. Vérifier que cette fonction définit bien une densité.

2. Déterminer l'espérance de cette loi.

Soit V_1, V_2, \dots, V_n des variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

3. Montrer par récurrence que la loi de la somme $V_1 + \dots + V_n$ est la loi $\gamma_{n,\lambda}$.

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\gamma_{a,\lambda}$.

4. Déterminer la loi de λX .

5. Montrer que $X + Y$ et X/Y sont des v.a. indépendantes dont on calculera les lois.

6. Montrer que $X + Y$ et $X/(X + Y)$ sont des v.a. indépendantes. Calculer la loi de $X/(X + Y)$.

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\gamma_{a,\lambda}$ et $\gamma_{b,\lambda}$ respectivement.

7. Déterminer la loi de $X + Y$.

Soit Z_1, Z_2, \dots, Z_n des variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

8. Montrer que Z_1^2 suit une loi $\gamma_{1/2, 1/2}$.

9. Montrer que $Z_1^2 + \dots + Z_n^2$ suit une loi $\gamma_{n/2, 1/2}$. (La loi $\gamma_{n/2, 1/2}$ est également appelée loi $\chi^2(n)$).

Exercice 3 *Loi Normale*

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Notons $\Phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$ la fonction caractéristique de X . Donner $\text{Re}(\Phi_X(t))$ et

$\text{Im}(\Phi_X(t))$ puis montrer à l'aide d'intégrations par parties que $\Phi'_X(t) = -t\Phi_X(t)$. En déduire l'expression de Φ_X .

2. Soit $\theta \in [0, 2\pi]$. Déterminer la loi de $X_\theta = X \cos(\theta) + Y \sin(\theta)$ et $Y_\theta = -X \sin(\theta) + Y \cos(\theta)$.

3. Les variables X_θ et Y_θ sont-elles indépendantes ?

Exercice 4 *Extrait du partiel d'avril 2008*

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $N(m, \sigma^2)$ et $N(m', \sigma'^2)$. Quelle est la loi de $X + Y$?

2. Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes, toutes de loi $N(m, \sigma^2)$. Quelle est la loi de $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$?

3. Montrer que $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n - m)$ suit une loi $N(0, 1)$.

4. Soit $\alpha \in]0, 1[$, montrer qu'il existe (sans l'expliciter) un unique nombre réel positif ϕ_α tel que

$$\int_{-\phi_\alpha}^{\phi_\alpha} e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = 1 - \alpha.$$

5. En déduire qu'il existe un intervalle $I_\alpha = [m - t, m + t]$, avec t à préciser en fonction des constantes de l'exercice, tel que $P(\bar{X}_n \in I_\alpha) = 1 - \alpha$.

6. En déduire que pour tout $t > 0$ on a $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X}_n - m| > t) = 0$.

7. On applique 5) au cas où $m = 1/2, \sigma = 1/2, n = 1000$ et $\alpha = 0,05$. On a $\phi_\alpha = 1,96$ dans ce cas. Que peut-on dire de $\mathbb{P}(\bar{X}_n \leq 0,45)$?

CORRECTION DE LA FEUILLE DE TD 6

Exercice 1 Généralisation d'inégalités du cours

Soit X une variable aléatoire réelle de carré intégrable sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. g positive donne $\mathbb{E}(g(X)\mathbf{1}_{X \notin I}) \geq 0$ et g minorée par b sur I donne $\mathbb{E}(g(X)\mathbf{1}_{X \in I}) \geq b\mathbb{P}(X \in I)$.

2. Markov : X positive, $t > 0$, $g(x) = x$ et $I = [t, \infty[$.

Tchebycheff : $t > 0$, $g(x) = (x - E(X))^2$ et $I =]-\infty, E(X) - t] \cup [E(X) + t, +\infty[$.

3. Pour $g(x) = (x + c)^2$ pour $c > 0$, on a bien $g(x) \geq 0$ pour tout x et $g(x) \geq (t + c)^2$ pour $x \geq t > 0$. Donc

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{1}{(t + c)^2} \mathbb{E}[(X + c)^2].$$

Si $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{E}(X^2) = \sigma^2$, cela donne :

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\sigma^2 + c^2}{(t + c)^2}.$$

Le terme de droite est une fonction en c qui atteint son minimum au point $c = \sigma^2/t > 0$ et donne le résultat attendu.

Exercice 2 Loi Uniforme

Exercice 3 Loi Gamma

1. Direct.

2. On utilise le fait que $\Gamma(a + 1) = a\Gamma(a)$ pour obtenir que l'espérance de cette loi est a/λ .

3. Pour $n = 1$, ok. Supposons $n \geq 2$ et $S := V_1 + \dots + V_{n-1}$ de loi $\gamma_{n-1, \lambda}$. Soit g une fonction mesurable bornée de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On a

$$\mathbb{E}(g(V_1 + \dots + V_n)) = \mathbb{E}(g(S + V_n)) = \int_{\mathbb{R}} g(x + y) \mu_{(S, V_n)}(dx, dy)$$

et

$$\mathbb{E}(g(V_1 + \dots + V_n)) = \int_{\mathbb{R}} g(t) \mu_{V_1 + \dots + V_n}(dt).$$

Comme $f(v_1, \dots, v_{n-1}) = v_1 + \dots + v_{n-1}$ et $g(v_n) = v_n^2$ mesurables on en déduit que S et V_n sont indépendantes car (V_1, \dots, V_{n-1}) et V_n le sont,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} g(x + y) \mu_{(S, V_n)}(dx, dy) &= \int_0^\infty dx \int_x^\infty dt g(t) \frac{\lambda^{n-1}}{\Gamma(n-1)} e^{-\lambda t} x^{n-2} \\ &= \int_0^\infty g(t) \frac{\lambda^{n-1}}{\Gamma(n-1)} e^{-\lambda t} [x^{n-1}/(n-1)]_0^t dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(t) \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \exp(-\lambda t) t^{n-1} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(t) dt \end{aligned}$$

4. On peut utiliser la fonction de répartition. Avec un changement de variable on voit

que $\lambda X \sim \gamma_{a,1}$.

5. Soit g une fonction mesurable bornée de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 . On a

$$\mathbb{E}(g(X+Y, X/Y)) = \int_{\mathbb{R}^2} g(u, v) \mu_{(X+Y, X/Y)}(du, dv)$$

et

$$\mathbb{E}(g(X+Y, X/Y)) = \int_{\mathbb{R}^2} g \circ f(x, y) \mu_{(X, Y)}(dx, dy)$$

où $f(x, y) = (x+y, x/y)$ définie de $(\mathbb{R}^{*+})^2$ vers $(\mathbb{R}^{*+})^2$. Comme les variables X et Y sont indépendantes, le couple (X, Y) a pour densité $\mu_X(dx)\mu_Y(dy)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^2 .

On fait alors le changement de variable $u = x+y$, $v = x/y$, pour $x > 0$ et $y > 0$;

Ceci est équivalent à $x = uv/(v+1)$ et $y = u/(v+1)$ pour $u > 0$ et $v > 0$.

On a de plus $|J(u, v)| = \begin{vmatrix} v/(v+1) & u/(v+1) \\ 1/(v+1) & -u/(v+1)^2 \end{vmatrix} = \frac{u}{(v+1)^2}$. Il suit

$$\mathbb{E}(g(X+Y, X/Y)) = \int_{\mathbb{R}^2} g(u, v) u^{2a-1} e^{-\lambda u} \mathbf{1}_{u>0} \frac{v^{a-1}}{(v+1)^{2a}} \mathbf{1}_{v>0} \frac{\lambda^{2a}}{\Gamma(a)^2} dudv.$$

Les variables sont indépendantes, $\mu_{X+Y}(du) = \frac{\lambda^{2a}}{\Gamma(2a)} u^{2a-1} e^{-\lambda u} \mathbf{1}_{u>0} du$ et $\mu_{X/Y}(dv) = \frac{\Gamma(2a)}{\Gamma(a)^2} \frac{v^{a-1}}{(v+1)^{2a}} \mathbf{1}_{v>0} dv$.

6. Soit g une fonction mesurable bornée de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 . On a

$$\mathbb{E}(g(X+Y, X/(X+Y))) = \int_{\mathbb{R}^2} g(u, v) \mu_{(X+Y, X/(X+Y))}(du, dv)$$

et

$$\mathbb{E}(g(X+Y, X/(X+Y))) = \int_{\mathbb{R}^2} g \circ f(x, y) \mu_{(X+Y, X/(X+Y))}(dx, dy)$$

où $f(x, y) = (x+y, x/(x+y))$ définie de $(\mathbb{R}^{*+})^2$ vers $(\mathbb{R}^{*+})^2$. Comme les variables X et Y sont indépendantes, le couple (X, Y) a pour densité $\mu_X(dx)\mu_Y(dy)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^2 .

On fait alors le changement de variable $u = x+y$, $v = x/(x+y)$, pour $x > 0$ et $y > 0$;

Ceci est équivalent à $x = uv$ et $y = u(1-v)$ pour $u > 0$ et $v \in (0, 1)$.

On a de plus $|J(u, v)| = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = u$. Il suit

$$\mathbb{E}(g(X+Y, X/(X+Y))) = \int_{\mathbb{R}^2} g(u, v) \frac{\lambda^{2a}}{\Gamma(2a)} u^{2a-1} e^{-\lambda u} \mathbf{1}_{u>0} \frac{\Gamma(2a)}{\Gamma(a)^2} (v(1-v))^{a-1} \mathbf{1}_{0<v<1} dudv.$$

Les variables sont indépendantes et on a de plus $\mu_{X/(X+Y)}(dv) = \frac{\Gamma(2a)}{\Gamma(a)^2} (v(1-v))^{a-1} \mathbf{1}_{0<v<1} dv$.

7. Le seul point délicat est de calculer $\int_0^t x^{a-1} (t-x)^{b-1} dx = t^{a+b-1} \int_0^1 y^{a-1} (1-y)^{b-1} dy = t^{a+b-1} C_{a,b}$. La constante $C_{a,b}$ est forcément égale à $\Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$ en tenant compte de la normalisation.

8. Si Z_1 est de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et g une fonction mesurable bornée de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On a

$$\mathbb{E}(g(X^2)) = \int_{\mathbb{R}} g(u) \mu_{X^2}(du) \quad \mathbb{E}(g(X^2)) = \int_{\mathbb{R}} g(x^2) \mu_X(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(x^2) e^{-x^2/2} dx.$$

Par parité de $x \mapsto g(x^2)e^{-x^2/2}$ on a $\mathbb{E}(g(X^2)) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty g(x^2)e^{-x^2/2} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty g(y)e^{-y/2} \frac{dy}{2\sqrt{y}}$

donc $\mu_{X^2}(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} y^{-1/2} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(y)$.

9. On le montre par récurrence. Pour $n = 1$ c'est vrai. Supposons que $S_{n-1} = Z_1^2 + \dots + Z_{n-1}^2 \sim \gamma_{\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2}}$ et $Z_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$. On a $S_n = S_{n-1} + Z_n^2$. Comme $f(z_1, \dots, z_{n-1}) = z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2$ et $g(x_n) = z_n^2$ mesurables on en déduit que S_{n-1} et Z_n^2 sont indépendantes car (Z_1, \dots, Z_{n-1}) et Z_n le sont. On utilise ensuite la question 7 et 8 donnant S_n suit une $\gamma_{\frac{n-1}{2} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = \gamma_{\frac{n}{2}, \frac{1}{2}}$.

Exercice 4 Loi Normale

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. On montre avec les indications que $\Phi'_X(t) = -t\Phi_X(t)$. En utilisant le fait que $\Phi_X(0) = 1$ on obtient que $\log(\Phi_X(t)) = -t^2/2$ et $\Phi_X(t) = \exp(-t^2/2)$.

2. En utilisant l'indépendance et la question précédente on trouve $\Phi_{X_\theta}(t) = \Phi_{Y_\theta}(t) = \exp(-t^2/2)$. Ces variables sont donc de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

3. On définit $h_\theta(x, y) = (x \cos(\theta) + y \sin(\theta), -x \sin(\theta) + y \cos(\theta))$ sur \mathbb{R}^2 . Par application du théorème du transfert, si g est une fonction mesurable bornée de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 , alors

$$\mathbb{E}(g(X_\theta, Y_\theta)) = \int_{\mathbb{R}^2} g(u, v) \mu_{(X_\theta, Y_\theta)}(du, dv)$$

et

$$\mathbb{E}(g(X_\theta, Y_\theta)) = \mathbb{E}(g \circ h_\theta(X, Y)) = \int_{\mathbb{R}^2} g \circ h_\theta(x, y) \mu_{(X, Y)}(dx, dy).$$

X et Y sont indépendantes donc (X, Y) a pour densité $e^{-(x^2+y^2)/2}/(2\pi)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^2 . On fait le changement de variable $u = x \cos(\theta) + y \sin(\theta)$, $v = -x \sin(\theta) + y \cos(\theta)$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ceci est équivalent à $x = u \cos(\theta) - v \sin(\theta)$ et $y = u \sin(\theta) + v \cos(\theta)$ pour $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Le jacobien vaut $|J(u, v)| = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix} = 1$. On obtient, en utilisant le fait que $x^2 + y^2 = u^2 + v^2$,

$$\mathbb{E}(g \circ h_\theta(X, Y)) = \int_{\mathbb{R}^2} g(u, v) e^{-(u^2+v^2)/2}/(2\pi) dudv.$$

Par conséquent, $\mu_{(X_\theta, Y_\theta)} = \mu_{X_\theta} \otimes \mu_{Y_\theta}$. Ces deux variables aléatoires sont indépendantes.

Exercice 5 Voir Test partiel du 11 avril 2008

FEUILLE DE TD 7

Fonction caractéristique

Exercice 1 *Lois symétriques, fonction caractéristique*

La loi d'une variable aléatoire réelle X est dite *symétrique* lorsque X et $-X$ ont même loi.

1. À quelle condition une loi de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue est-elle symétrique ?
2. Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes de même loi. Exprimer en fonction de la fonction caractéristique Φ_X de X les fonctions caractéristiques suivantes : Φ_{-X} , Φ_{X+Y} , Φ_{X-Y} .
3. Montrer que la loi d'une variable aléatoire réelle X est symétrique si, et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Phi_X(t) \in \mathbb{R}$.
4. Soit Y une v.a. réelle, et Z une v.a. indépendante de Y et de loi donnée par :

$$\mathbb{P}(Z = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(Z = -1).$$

Montrer que la loi de $X = ZY$ est symétrique et calculer sa fonction caractéristique (en fonction de Φ_Y). Si Y admet une densité f , quelle est la loi de X ?

Exercice 2 *Calculs de fonctions caractéristiques*

1. Calculer Φ_X où X suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$. En déduire Φ_Z où Z suit la loi $\gamma_{n,\lambda}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Laplace, c'est-à-dire que la loi de X a pour densité $x \mapsto \frac{1}{2}e^{-|x|}$ sur \mathbb{R} . Montrer que, pour $t \in \mathbb{R}$, $\Phi_X(t) = \frac{1}{1+t^2}$. (on pourra utiliser la dernière question de l'exercice précédent)
3. En déduire la fonction caractéristique d'une variable aléatoire suivant une loi de Cauchy de paramètre 1 (densité $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$). Quelle est la loi de la moyenne de deux variables aléatoires de loi de Cauchy de paramètre 1 indépendantes ?
4. Soit X_1, X_2, X_3, X_4 des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Rappeler la valeur de $\Phi_{X_i}(t)$. Calculer $\Phi_{X_1 X_2}$ (en utilisant le théorème de Fubini), puis $\Phi_{X_1 X_2 + X_3 X_4}$, et en déduire la loi de $X_1 X_2 + X_3 X_4$.

Loi conditionnelle (cas général, cas à densité)

Exercice 3 Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. Quelle est la loi conditionnelle de X sachant Y ? Plus généralement, pour $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable, quelle est la loi conditionnelle de $\varphi(X, Y)$ sachant Y ?

Exercice 4 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Déterminer la loi du couple $(X, X + Y)$, et en déduire la loi conditionnelle de X sachant $X + Y$.

Exercice 5 Soit X, Y des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Déterminer la loi du couple $(X, Z) = (X, X^2 + Y^2)$.
2. En déduire la loi de $X^2 + Y^2$ puis la loi conditionnelle de X sachant $X^2 + Y^2$.
3. Calculer $\mathbb{E}[|X| | X^2 + Y^2]$.
4. On note $R = \sqrt{Z}$ et on définit $\Theta \in [0, 2\pi[$ par les équations $X = R \cos \Theta$ et $Y = R \sin \Theta$. Déterminer la loi du couple (R, Θ) . Ces variables sont-elles indépendantes ? Retrouver alors rapidement le résultat de la question précédente.

Exercice 6 *Loi conditionnelle autour de la loi de Poisson*

Soient X_1 et X_2 des variables aléatoires, indépendantes, de loi de Poisson de paramètre λ_1 et λ_2 respectivement.

1. Calculer la loi de $X_1 + X_2$.
2. Calculer la loi conditionnelle de X_1 sachant $X_1 + X_2$. Identifier une loi connue puis interpréter.

Exercice 7 *Loi conditionnelle autour de la loi de Bernoulli*

Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes toutes de même loi : $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - p$ pour un $p \in]0, 1[$. Soit $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

1. Quelle est la loi de S_n ?
2. Quelle est la loi du couple (X_1, S_n) ?
3. Quelle est la loi conditionnelle de X_1 sachant S_n ?
4. Quelle est la loi de conditionnelle de S_n sachant X_1 ?

Exercice 8 *Loi conditionnelle autour de la loi exponentielle*

Soient T_1 et T_2 des variables aléatoires, indépendantes, de loi $\text{Exp}(\lambda)$.

1. Calculer la loi de $T_1 + T_2$.
2. Calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(T_1 \in [a, b] | T_1 \leq t \leq T_1 + T_2)$: Qu'en concluez-vous ?

Fonction caractéristique

Exercice 1 Lois symétriques, fonction caractéristique

La loi d'une variable aléatoire réelle X est dite *symétrique* lorsque X et $-X$ ont même loi.

1. X de loi $f(x)dx$. Il faut et il suffit que f soit paire (ou plutôt, soit égale Lebesgue-presque-partout à une fonction paire) pour que la loi de X soit symétrique. En effet la loi de $-X$ est de densité $-f$; et si deux densités f et g fournissent la même loi, elles sont telles que $\int_A f(x)dx = \int_A g(x)dx$ pour tout borélien A , d'où $0 = \int_{\{f-g>0\}}(f-g) - \int_{\{f-g<0\}}(f-g) = \int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)|dx$ et donc $f(x) = g(x)$ dx -presque partout.

2. $\Phi_{-X}(t) = \Phi_X(-t) = \overline{\Phi_X(t)}$ (car $X(\omega) \in \mathbb{R}$), $\Phi_{X+Y} = (\Phi_X)^2$, $\Phi_{X-Y} = |\Phi_X|^2$.

3. $\Phi_X(t) \in \mathbb{R}$ ssi $\Phi_X(t) = \overline{\Phi_X(t)}$ ssi $\Phi_X(t) = \Phi_{-X}(t)$.

4. La variable Z est symétrique, et est indépendante de Y . Donc le couple $(-Z, Y)$ a même loi que (Z, Y) . Donc $-ZY$ et ZY ont même loi. Et, en découpant selon les valeurs de Z , $\Phi_X(t) = \frac{1}{2}(E[e^{itY}] + E[e^{-itY}]) = \text{Re}(\Phi_Y(t))$. Si Y a pour densité f , $-Y$ a pour densité $y \mapsto f(-y)$, donc $\Phi_X(t) = \frac{1}{2}(\Phi_Y(t) + \Phi_{-Y}(t)) = \int e^{ity} \frac{f(y)+f(-y)}{2} dy$ pour tout t , ce qui montre que X a pour densité $\frac{f(y)+f(-y)}{2}$.

Exercice 2 Calculs de fonctions caractéristiques

1. Si X suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$, $\Phi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$. Comme (voir fiche 4) la loi $\gamma_{n,\lambda}$ est la loi de la somme de n variables de loi exponentielle indépendantes,

$$\Phi_Z(t) = (\Phi_X(t))^n = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it} \right)^n.$$

2. On peut voir que, si on note $f(x) = e^{-x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ la densité de la loi exponentielle de paramètre 1, alors $\frac{1}{2}e^{-|x|} = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$, donc X se déduit d'une variable Y de loi $\mathcal{E}(1)$ de la même façon qu'à la fin de l'exercice 1. Ainsi, on a $\Phi_X(t) = \text{Re}\left(\frac{1}{1-it}\right) = \frac{1}{1+t^2}$.

3. Comme Φ_X est intégrable sur \mathbb{R} on a, par la formule d'inversion de Fourier (ou Corollaire II.14 du cours 7), $\frac{1}{2}e^{-|x|} = \frac{1}{2\pi} \int e^{-itx} \Phi_X(t) dt$ où X est comme à la question d'avant. En réécrivant cette égalité, on a $\int e^{-itx} \frac{dt}{\pi(1+t^2)} = e^{-|x|}$, c'est-à-dire $\Phi_Y(t) = e^{-|t|}$ si Y est de loi de Cauchy de paramètre 1. Soit X_1, X_2 de loi de Cauchy de paramètre 1. $\Phi_{\frac{X_1+X_2}{2}}(t) = E[e^{i\frac{t}{2}(X_1+X_2)}] = \Phi_{X_1}(t/2)^2 = e^{-|t|} = \Phi_{X_1}(t)$. Donc la loi de $\frac{X_1+X_2}{2}$ est celle de X_1 .

4. On a :

$$\begin{aligned} \Phi_{X_1 X_2}(t) &= \int \left(\int e^{-itxy} e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \right) e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \int \Phi_{X_2}(tx) e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \int e^{-(t^2+1)\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}. \end{aligned}$$

Puis $\Phi_{X_1 X_2 + X_3 X_4}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, et la question précédente montre que $X_1 X_2 + X_3 X_4$ suit la loi $\frac{1}{2}e^{-|t|}dt$.

Lois conditionnelles

Exercice 3 examen de rattrapage du 25 juin 2008. Pour toute $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable bornée, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(\varphi(X, Y))] &= \int f(\varphi(x, y)) d\mu_{(X, Y)}(x, y) = \int \left(\int f(\varphi(x, y)) d\mu_X(x) \right) d\mu_Y(y) \\ &= \int \left(\int f(\phi) d\mu_{\varphi(X, y)}(\phi) \right) d\mu_Y(y), \end{aligned}$$

donc la loi conditionnelle de $\varphi(X, Y)$ sachant $Y = y$ est la loi de $\varphi(X, y)$.

Exercice 4 On trouve $(X, Z) = (X, X + Y)$ de densité $e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}} \frac{1}{2\pi}$, et comme Z a pour loi $\mathcal{N}(0, 2)$, la loi de X conditionnellement à Z a pour densité $e^{-\frac{x^2}{2} - \frac{(z-x)^2}{2} + \frac{z^2}{4}} \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ et l'exposant s'écrit $-(x^2 - zx + z^2/4) = -(x - \frac{z}{2})^2$, donc c'est la loi $\mathcal{N}(\frac{z}{2}, 2)$.

Exercice 5 Loi conditionnelle autour de la loi normale

Soit X, Y des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Pour toute fonction bornée $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(X, Z)] &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, x^2 + y^2) e^{-x^2/2} e^{-y^2/2} \frac{dx dy}{2\pi} \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\infty} f(x, x^2 + y^2) e^{-x^2/2} e^{-y^2/2} \frac{dy dx}{2\pi} \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}} \int_{x^2}^{\infty} f(x, z) e^{-z/2} \frac{dz}{2\sqrt{z-x^2}} \frac{dx}{2\pi} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, z) \mathbf{1}_{\{z \geq x^2\}} \frac{e^{-z/2}}{2\pi\sqrt{z-x^2}} dx dz, \end{aligned}$$

donc la loi du couple (X, Z) est de densité $f_{(X, Z)}(x, z) = \frac{e^{-z/2}}{2\pi\sqrt{z-x^2}} \mathbf{1}_{\{z \geq x^2\}}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^2 .

2. Alors la loi de Z est de densité :

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X, Z)}(x, z) dx = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(z) \frac{e^{-z/2}}{2\pi} \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \frac{dx}{\sqrt{z-x^2}} = \frac{1}{2} e^{-z/2} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(z)$$

(en reconnaissant la dérivée de $\arcsin \frac{x}{\sqrt{z}}$ dans l'intégrale), autrement dit Z suit la loi exponentielle de paramètre 1/2. Donc la loi conditionnelle de X sachant Z est $p(z, dx) = f_{X|Z=z}(x) dx$ où, pour $z > 0$:

$$f_{X|Z=z}(x) = \frac{f_{(X, Z)}(x, z)}{f_Z(z)} = \frac{\mathbf{1}_{\{|x| \leq \sqrt{z}\}}}{\sqrt{z-x^2}} \frac{1}{\pi},$$

et $f_{X|Z=x}(x) = 0$ si $z \leq 0$.

3. Alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|X| | Z] &= \int_{\mathbb{R}} |x| f_{X|Z}(x) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\sqrt{Z}} \frac{x}{\sqrt{Z-x^2}} dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\sqrt{Z-x^2} \right]_{x=0}^{\sqrt{Z}} \\ &= \frac{2\sqrt{Z}}{\pi}.\end{aligned}$$

4. Voir corrigé de l'examen, ou : On note $\phi : (x, y) \mapsto (r, \theta)$ l'application de passage en coordonnées polaires ; c'est un \mathcal{C}^1 -difféo de $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_+ \times \{0\})$ dans $]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$, avec $|J\phi^{-1}(r, \theta)| = r$. Pour toute fonction mesurable bornée $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, on a donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(R, \Theta)] &= \mathbb{E}[f(\phi(X, Y))] = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(\phi(x, y)) e^{-(x^2+y^2)/2} \frac{dx dy}{2\pi} \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) e^{-r^2/2} r dr \frac{d\theta}{2\pi},\end{aligned}$$

donc (R, Θ) a pour densité $re^{-r^2/2} \mathbf{1}_{]0, +\infty[}(r) \frac{\mathbf{1}_{]0, 2\pi[}(\theta)}{2\pi}$. R et Θ sont indépendantes, de lois respectives $re^{-r^2/2} \mathbf{1}_{]0, +\infty[}(r) dr$ et la loi uniforme sur $[0, 2\pi]$. La loi conditionnelle de X sachant Z est la loi conditionnelle de $R \cos \Theta = \sqrt{Z} \cos \Theta$ sachant Z . Or Z et Θ sont indépendantes car $R = \sqrt{Z}$ et Θ le sont. Par l'exercice 3, la loi de X sachant $Z = z$ est donc la loi de $\sqrt{z} \cos \Theta$. Notamment, on a donc :

$$\mathbb{E}[|X| | Z = z] = \sqrt{z} \mathbb{E}[|\cos \Theta|] = 4\sqrt{z} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{2\sqrt{z}}{\pi},$$

comme obtenu plus haut. On pourrait aussi retrouver la densité $f_{X|Z=z}(x)$.

Exercice 6 *Loi conditionnelle autour de la loi de Poisson*
examen du 9 juin 2008

Exercice 7 *Loi conditionnelle autour de la loi de Bernoulli*
test partiel du 11 avril 2008

Exercice 8 *Loi conditionnelle autour de la loi de exponentielle*
examen de rattrapage du 25 juin 2008

FEUILLE DE TD 8

Modes de convergence et lemme de Borel-Cantelli

QUELQUES RAPPELS

Par définition

$$\liminf_n A_n = \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} A_k,$$

donc $\omega \in \liminf_n A_n \Leftrightarrow$ il existe n tel que $\omega \in A_k$ pour tout $k \geq n$. $\liminf_n A_n$ contient les éléments $\omega \in \Omega$ qui appartiennent à tous les A_n à partir d'un certain rang. D'autre part

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k$$

donc $\omega \in \limsup_n A_n \Leftrightarrow$ pour tout n , il existe $k(n) \geq n$ tel que $\omega \in A_{k(n)}$ donc $\limsup_n A_n$ contient les éléments $\omega \in \Omega$ qui appartiennent à une infinité de A_n .

On savait déjà que pour une suite d'événements $(A_n)_n$:

- * $\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$ avec une égalité dans le cas où les A_n sont deux à deux disjoints.
- * $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$ lorsque $(A_n)_n$ est croissante.
- * $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$ lorsque $(A_n)_n$ est décroissante.

Posons $I_n = \bigcap_{k \geq n} A_k$ et $J_n = \bigcup_{k \geq n} A_k$. On a donc $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\bigcup_{k \geq n} A_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(J_n)$ et $\mathbb{P}(\liminf_n A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\bigcap_{k \geq n} A_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(I_n)$.

De plus pour tout n

$$I_n \subset A_n \subset J_n$$

et par conséquent

$$\mathbb{P}(\liminf_n A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(I_n) \leq \liminf_n \mathbb{P}(A_n) \leq \limsup_n \mathbb{P}(A_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(J_n) = \mathbb{P}(\limsup_n A_n).$$

Borel-Cantelli :

- * $\sum_n \mathbb{P}(A_n) < \infty \Rightarrow \mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0$.
 - * (A_n) mutuellement indépendants et $\sum_n \mathbb{P}(A_n) = \infty \Rightarrow \mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 1$.
-

Exercice 1 Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose

$$Y = \limsup_n \frac{X_n}{\ln n}.$$

Le but est de montrer que $Y = \frac{1}{\lambda}$ presque sûrement.

1. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\limsup_n \left\{ \frac{X_n}{\ln n} \geq \frac{1}{\lambda} \right\}\right) \leq \mathbb{P}\left(\limsup_n \frac{X_n}{\ln n} \geq \frac{1}{\lambda}\right).$$

2. Montrer que $\mathbb{P}\left(\limsup_n \left\{ \frac{X_n}{\ln n} \geq \frac{1}{\lambda} \right\}\right) = 1$. En déduire que $\mathbb{P}(Y \geq \frac{1}{\lambda}) = 1$.

3. Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\limsup_n \frac{X_n}{\ln n} > \frac{1+\epsilon}{\lambda}\right) \leq \mathbb{P}\left(\limsup_n \left\{ \frac{X_n}{\ln n} > \frac{1+\epsilon}{\lambda} \right\}\right).$$

4. Montrer que $\mathbb{P}\left(\limsup_n \left\{ \frac{X_n}{\ln n} > \frac{1+\epsilon}{\lambda} \right\}\right) = 0$. En déduire que $\mathbb{P}(Y > \frac{1+\epsilon}{\lambda}) = 0$.

5. En déduire que $\mathbb{P}(Y = \frac{1}{\lambda}) = 1$.

6. Montrer que $\frac{X_n}{\ln n}$ converge vers 0 en probabilité. Cette suite converge-t-elle presque sûrement vers 0 ?

Exercice 2 Soit $(p_n)_{n \geq 1}$ une suite dans $[0, 1]$ qui tend vers 0. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi Bernoulli de paramètre p_n : $\mathbb{P}(X_n = 1) = p_n = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0)$.

1. Montrer que X_n converge vers 0 en probabilité.

2. Sous quelle condition sur la somme $\sum_n p_n$ la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ converge-t-elle aussi presque sûrement vers 0 ?

Exercice 3 Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p (i.e. qui valent 1 avec probabilité p et 0 avec probabilité $q = 1 - p$). Pour tout n , on note $Y_n = U_n U_{n+1}$, puis $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$.

1. Pour tout n , quelle est la loi de Y_n ?

2. A quelle condition sur n et m tels que $1 \leq n < m$ les variables aléatoires Y_n et Y_m sont-elles indépendantes ?

3. Calculer $\mathbb{E}[Y_n Y_m]$ puis calculer $\mathbb{E}[S_n/n]$.

4. Montrer qu'il existe une constante C telle que, pour tout n , $\text{Var}[S_n] \leq Cn$.

5. Démontrer que la suite S_n/n converge en probabilité vers une constante à préciser.

CORRECTION DE LA FEUILLE DE TD 8

Exercice 1

1. Decoule de l'implication suivante Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels. On rappelle que $\limsup_n x_n = \lim_n \sup_{k \geq n} x_k$. Alors on peut montrer que

$$x_n \geq 0 \text{ pour une infinité de } n \implies \limsup_n x_n \geq 0$$

2. On a $\mathbb{P}(\{\frac{X_n}{\ln n} \geq \frac{1}{\lambda}\}) = \mathbb{P}(\{X_n \geq \frac{\ln n}{\lambda}\}) = e^{-\ln n} = n^{-1}$. Donc

$$\sum_n \mathbb{P}(\{\frac{X_n}{\ln n} \geq \frac{1}{\lambda}\}) = \sum_n \frac{1}{n} = \infty.$$

Comme les variables sont indépendantes, Borel Cantelli implique $\mathbb{P}(\limsup_n \{\frac{X_n}{\ln n} \geq \frac{1}{\lambda}\}) = 1$ et donc avec 1. $\mathbb{P}(Y \geq \frac{1}{\lambda}) = 1$.

3. Decoule de l'implication suivante Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels. On rappelle que $\limsup_n x_n = \lim_n \sup_{k \geq n} x_k$. Alors on peut montrer que

$$\limsup_n x_n > 0 \implies x_n > 0 \text{ pour une infinité de } n.$$

4. Maintenant

$$\sum_n \mathbb{P}(\{\frac{X_n}{\ln n} > \frac{1+\epsilon}{\lambda}\}) = \sum_n n^{-(1+\epsilon)} < \infty.$$

Borel Cantelli nous dit alors que $\mathbb{P}(\limsup_n \{\frac{X_n}{\ln n} > \frac{1}{\lambda}(1+\epsilon)\}) = 0$. Avec 3. $\mathbb{P}(Y > \frac{1}{\lambda}(1+\epsilon)) = 0$.

5. On laissant tendre ϵ vers 0 on obtient par σ -continuité que $\mathbb{P}(Y > \frac{1}{\lambda}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}(Y > \frac{1+\epsilon}{\lambda}) = 0$. Donc $\mathbb{P}(Y = \frac{1}{\lambda}) = \mathbb{P}(Y \geq \frac{1}{\lambda}) - \mathbb{P}(Y > \frac{1}{\lambda}) = 1 - 0 = 1$.

6. On a $\mathbb{P}(\frac{X_n}{\ln n} \geq a) = \mathbb{P}(X_1 \geq a \ln n) \rightarrow 0$.

Exercice 2

1. On a pour tout $\epsilon > 0$ que $\mathbb{P}(X_n \geq \epsilon) \leq p_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

2. On pose $\Lambda_n = \{X_n = 1\}$. $\Lambda = \limsup_n \Lambda_n = \bigcap_n \bigcup_{k \geq n} \Lambda_k$ est l'ensemble des points $\omega \in \Omega$ pour lesquelles $X_n(\omega)$ ne converge pas vers 0. D'après Borel-Cantelli $\mathbb{P}(\Lambda) = 0$ ssi $\sum_n \mathbb{P}(\Lambda_n) < \infty$. Donc $(X_n)_n$ converge presque sûrement vers 0 ssi $\sum_n p_n < \infty$.

Exercice 3 Voir examen du 9 juin 2008

1. Montrons que $\limsup\{\frac{X_n}{\ln n} \geq 1/\lambda\} \subset \{\limsup \frac{X_n}{\ln n} \geq 1/\lambda\}$.

Soit $\omega \in \limsup\{\frac{X_n}{\ln n} \geq 1/\lambda\}$. Alors ω appartient à une infinité d'événements $\{\frac{X_n}{\ln n} \geq 1/\lambda\}$ c'est-à-dire que l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}, \frac{X_n(\omega)}{\ln n} \geq 1/\lambda\}$ est infini.

Par conséquent, $\limsup \frac{X_n(\omega)}{\ln n} \geq 1/\lambda$; soit encore $\omega \in \{\limsup \frac{X_n}{\ln n} \geq 1/\lambda\}$.

2. On a $\mathbb{P}(\{\frac{X_n}{\ln n} \geq \frac{1}{\lambda}\}) = \mathbb{P}(\{X_n \geq \frac{\ln n}{\lambda}\}) = e^{-\ln n} = n^{-1}$. Donc

$$\sum_n \mathbb{P}(\{\frac{X_n}{\ln n} \geq \frac{1}{\lambda}\}) = \sum_n \frac{1}{n} = \infty.$$

Comme les variables sont indépendantes, Borel Cantelli implique $\mathbb{P}(\limsup_n \{\frac{X_n}{\ln n} \geq \frac{1}{\lambda}\}) = 1$ et donc avec la question 1. $\mathbb{P}(Y \geq \frac{1}{\lambda}) = 1$.

3. Montrons que $\{\limsup \frac{X_n}{\ln n} > \frac{1+\epsilon}{\lambda}\} \subset \limsup\{\frac{X_n}{\ln n} > \frac{1+\epsilon}{\lambda}\}$.

Soit $\omega \in \{\limsup \frac{X_n}{\ln n} > \frac{1+\epsilon}{\lambda}\}$ on a alors $\limsup \frac{X_n(\omega)}{\ln n} > \frac{1+\epsilon}{\lambda}$.

Or il existe une sous-suite de $(\frac{X_n(\omega)}{\ln n})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $\limsup \frac{X_n(\omega)}{\ln n}$.

Donc l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}, \frac{X_n(\omega)}{\ln n} > \frac{1+\epsilon}{\lambda}\}$ est infini.

Ce qui signifie que $\omega \in \limsup\{\frac{X_n}{\ln n} > \frac{1+\epsilon}{\lambda}\}$.

4. Maintenant

$$\sum_n \mathbb{P}(\{\frac{X_n}{\ln n} > \frac{1+\epsilon}{\lambda}\}) = \sum_n n^{-(1+\epsilon)} < \infty.$$

Borel Cantelli nous dit alors que $\mathbb{P}(\limsup_n \{\frac{X_n}{\ln n} > \frac{1}{\lambda}(1+\epsilon)\}) = 0$.

Avec la question 3. $\mathbb{P}(Y > \frac{1}{\lambda}(1+\epsilon)) = 0$.

5. En laissant tendre ϵ vers 0 on obtient par σ -continuité que

$\mathbb{P}(Y > \frac{1}{\lambda}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}(Y > \frac{1+\epsilon}{\lambda}) = 0$. Donc $\mathbb{P}(Y = \frac{1}{\lambda}) = \mathbb{P}(Y \geq \frac{1}{\lambda}) - \mathbb{P}(Y > \frac{1}{\lambda}) = 1 - 0 = 1$.

6. On a $\mathbb{P}(\frac{X_n}{\ln n} \geq \epsilon) = \mathbb{P}(X_1 \geq \epsilon \ln n) \rightarrow 0$.

Autrement dit, il est clair que cette variable converge en probabilité vers 0.

On peut montrer qu'elle ne converge pas ps vers 0 en utilisant l'équivalence

$$Y_n \xrightarrow{ps} Y \text{ si et seulement si } \forall \epsilon > 0 \quad \mathbb{P}(\limsup_n |Y_n - Y| > \epsilon) = 0.$$

En effet, pour $Y_n = X_n/\ln n$ et $Y = 0$ ici, on voit très rapidement apparaître une contradiction avec le résultat de la question 5.

FEUILLE DE TD 9

Exercice 1 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ et $\mathcal{E}(\mu)$ avec $\mu > 0$. On note $Z = \min(X, Y)$.

1. Calculer la fonction de répartition de Z .
2. Calculer $\mathbb{P}(X \leq Y)$.
3. Montrer que les variables Z et $\mathbf{1}_{\{Z=X\}}$ sont indépendantes.

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0, 1[$ et $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. On note $Z = \min(X, Y)$.

4. Calculer les fonctions de répartition de X et Y .
5. Calculer $\mathbb{P}(X \leq Y)$.
6. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(Z = k)$.
7. Pour $\ell \in \mathbb{N}$, a et b deux réels tels que $\ell < a < b < \ell + 1$, calculer $\mathbb{P}(a < Z < b)$.

Exercice 2

1. Soit X_0, X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Soit N une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ indépendante de X_0, X_1, \dots, X_n . On pose

$$U = \sum_{i=0}^N X_i.$$

Exprimer la fonction caractéristique de U en fonction de celle de X_0 .

2. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre p . Soit N une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ indépendante de $(X_n)_{n \geq 1}$. On pose

$$V = \begin{cases} 0 & \text{si } N = 0, \\ \sum_{i=1}^N X_i & \text{si } N \geq 1. \end{cases}$$

Calculer la fonction génératrice de V . Quelle loi reconnaissez-vous ?

Exercice 3

1. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Montrer que la suite de terme général $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 e^{X_i}$ converge presque sûrement lorsque n tend vers l'infini vers une limite que l'on précisera.

2. Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ et $(Z_n)_{n \geq 1}$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[0, 1]$. Déterminer le comportement lorsque n tend vers l'infini de la suite de terme général $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{Y_i + Z_i \leq 1\}}$.

3. Notons $M_n = \max(Y_1, \dots, Y_n)$. Déterminer la loi de M_n puis montrer que M_n converge en probabilité vers 1.

CORRECTION DE LA FEUILLE DE TD 9

Exercice 1 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ et $\mathcal{E}(\mu)$ avec $\mu > 0$. On note $Z = \min(X, Y)$.

1. Z est une variable positive. Pour $z > 0$, on a $\mathbb{P}(Z \leq z) = 1 - \mathbb{P}(X > z, Y > z) = 1 - \mathbb{P}(X > z)\mathbb{P}(Y > z) = 1 - e^{-(\lambda+\mu)z}$ donc Z suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda + \mu$.

2.
$$\mathbb{P}(X \leq Y) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{x \leq y} \mu_{(X,Y)}(dx, dy) \stackrel{\text{Tonelli}}{=} \int_0^\infty \left(\int_x^\infty \mu e^{-\mu y} dy \right) \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

3. Il est suffisant de montrer que pour $A \subset \mathbb{R}$ borélien : $\mathbb{P}(Z \in A, \mathbf{1}_{Z=X} = 1) = \mathbb{P}(Z \in A)\mathbb{P}(\mathbf{1}_{Z=X} = 1)$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z \in A, \mathbf{1}_{Z=X} = 1) &= \mathbb{P}(X \leq Y, X \in A) \\ &= \int_A \left(\int_x^\infty \mu e^{-\mu y} dy \right) \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x) dx \\ &= \lambda \int_A e^{-(\lambda+\mu)x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x) dx. \end{aligned}$$

D'autre part,
$$\mathbb{P}(Z \in A)\mathbb{P}(\mathbf{1}_{Z=X} = 1) = \mathbb{P}(Z \in A)\mathbb{P}(X \leq Y) = \int_A (\lambda + \mu) e^{-(\lambda+\mu)z} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(z) dz \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0, 1[$ et $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. On note $Z = \min(X, Y)$.

4. X est une variable à valeurs dans \mathbb{N}^* et pour $x \geq 1$, on a :

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X \leq [x]) = \sum_{k=1}^{[x]} p(1-p)^{k-1} = 1 - (1-p)^{[x]}.$$

Pour Y on a pour tout y : $\mathbb{P}(Y \leq y) = (1 - e^{-\lambda y})\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(y)$.

5.

$$\mathbb{P}(X \leq Y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \leq Y, X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y \geq k)\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} e^{-\lambda k} = \frac{pe^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}(1-p)}.$$

6. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(X = k, Y > k)$ car Y est à densité donc $\mathbb{P}(Z = k) = p(1-p)^{k-1}e^{-\lambda k}$.

7. Pour $\ell \in \mathbb{N}$, a et b deux réels tels que $\ell < a < b < \ell + 1$, on a :

$$\mathbb{P}(a < Z < b) = \mathbb{P}(a < Y < b, X \geq \ell + 1) = \mathbb{P}(a < Y < b)\mathbb{P}(X \geq \ell + 1) = \mathbb{P}(a < Y < b)(1 - \mathbb{P}(X \leq \ell)) = (e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b})(1-p)^\ell.$$

Exercice 2

1. On pose $U = \sum_{i=0}^N X_i$. $\phi_U(t) = \mathbb{E}[e^{itU}] = \mathbb{E}[e^{itU} (\sum_{k=0}^n \mathbf{1}_{N=k})] = \sum_{k=0}^n \mathbb{E}[e^{it \sum_{j=0}^k X_j}] \mathbb{P}(N = k)$ on trouve alors facilement que $\phi_U(t) = \phi_{X_0}(t) (p\phi_{X_0}(t) + 1 - p)^n$.

2. On pose $V = \left(\sum_{i=1}^N X_i \right) \mathbf{1}_{N \geq 1}$. $G_V(s) = \mathbb{E}[s^V] = \mathbb{E}[s^V (\sum_{k=0}^\infty \mathbf{1}_{N=k})] = \sum_{k=0}^\infty \mathbb{E}[s^V \mathbf{1}_{N=k}] =$

$$\mathbb{P}(N = 0) + \sum_{k=1}^\infty \mathbb{E}[s^{\sum_{j=1}^k X_j} \mathbf{1}_{N=k}] = e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^\infty (1-p+sp)^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda p(s-1)}.$$

On reconnaît la loi de Poisson de paramètre λp .

Exercice 3

1. $\mathbb{E}[X^2 e^X] = 2e^{1/2}$. On a des variables aléatoires indépendantes de même loi intégrables donc d'après la loi forte des grands nombres on a la convergence ps vers $2e^{1/2}$.
2. $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{Y+Z \leq 1}] = 1/2$. On a des variables aléatoires indépendantes de même loi intégrables donc d'après la loi forte des grands nombres on a la convergence ps vers $1/2$.
3. Notons $M_n = \max(Y_1, \dots, Y_n)$. On a pour $x < 0$ $\mathbb{P}(M_n \leq x) = 0$ et pour $x > 1$ $\mathbb{P}(M_n \leq x) = 1$. Pour $x \in [0, 1]$, on a $\mathbb{P}(M_n \leq x) = \mathbb{P}(Y_1 \leq x)^n = x^n$.
 $\mathbb{P}(|M_n - 1| > \varepsilon) = (1 - \varepsilon)^n \mathbf{1}_{0 < \varepsilon \leq 1}$. Donc cette probabilité tend vers 0 pour tout $\varepsilon > 0$.

FEUILLE DE TD 10

Exercice 1

Montrer que, dans une suite de lancers indépendants de pièces de monnaie identiques, la séquence PFPFF (**P**ile, **F**ace) apparaît une infinité de fois. Préciser ce résultat à l'aide de la loi forte des grands nombres.

Exercice 2

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi. On note $X = X_1$. On suppose $\mathbb{E}[X] = 0$ et $\mathbb{E}[X^4] < \infty$. Le but de l'exercice est de démontrer la loi forte des grands nombres pour la suite $(X_n)_n$. On note, pour tout n , $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

1. Montrer que, pour tout n , $\mathbb{E}[S_n^4] = n\mathbb{E}[X^4] + 3n(n-1)\mathbb{E}[X^2]^2$.
2. En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\sum_n \mathbb{P}(|S_n| > n\varepsilon)$ converge.
3. Conclure.

Exercice 3 Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

1. Montrer la convergence en probabilité suivante :

$$\frac{1}{\ln n} \max_{1 \leq k \leq n} X_k \xrightarrow{(p)} \frac{1}{\lambda}.$$

2. Démontrer que la suite de terme général $\max_{1 \leq k \leq n} X_k - \frac{\ln n}{\lambda}$ converge en loi vers une limite à déterminer.

Exercice 4

1. Montrer que si $(X_n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire constante c , alors la convergence a lieu en probabilité.
2. Donner un exemple de suite $(X_n)_{n \geq 0}$ qui converge en loi mais pas en probabilité (et donc pas presque sûrement). *Indication : utiliser par exemple X de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et $-X$, qui a même loi.*

Exercice 5 Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ et $Z_n = 1/\bar{X}_n$.

1. Montrer que Z_n converge presque sûrement vers λ quand n tend vers ∞ .
2. En supposant n suffisamment grand pour que cela se justifie, par quelle loi gaussienne peut-on approcher la loi de \bar{X}_n ?
3. Soit N une variable aléatoire de loi $N(0, 1)$, montrer qu'il existe un unique $\phi \in \mathbb{R}^+$ tel que $\mathbb{P}(|N| \leq \phi) = 0,95$.
4. En déduire un intervalle de la forme $I = [1/\lambda - \beta, 1/\lambda + \beta]$, avec β à déterminer, tel que $\mathbb{P}(\bar{X}_n \in I) = 0,95$.
5. En déduire ensuite un intervalle de la forme $J = [\alpha_1\lambda, \alpha_2\lambda]$, avec α_1, α_2 à déterminer, tel que $\mathbb{P}(Z_n \in J) = 0,95$.
6. Application numérique : calculer J , en fonction de λ inconnu, pour $n = 10000$ et $\phi = 1,96$.

CORRECTION DE LA FEUILLE DE TD 10

Exercice 1 $(X_n)_{n \geq 0}$ suite i.i.d. de loi $\mathbb{P}(X_n = F) = 1/2 = 1 - \mathbb{P}(X_n = P)$. On applique Borel-Cantelli aux événements indépendants

$$A_{5n} = \{(X_{5n}, X_{5n+1}, X_{5n+2}, X_{5n+3}, X_{5n+4}) = (P, F, P, F, F)\}$$

qui ont tous même proba de sorte que la série $\sum_n P(A_{5n})$ diverge grossièrement. La loi des grands nombres donne quant à elle la fréquence asymptotique d'apparition de la séquence : presque-sûrement,

$$\frac{1}{n} \#\{1 \leq k \leq n \mid (X_k, X_{k+1}, X_{k+2}, X_{k+3}, X_{k+4}) = (P, F, P, F, F)\} = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq 5k \leq n} \mathbf{1}_{A_{5k}} + \dots + \frac{1}{n} \sum_{1 \leq 5k+4 \leq n} \mathbf{1}_{A_{5k+4}}$$

(on découpe l'ensemble selon le résidu de k modulo 5 de façon à avoir des v.a. indépendantes).

Exercice 2

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi. On note $X = X_1$. On suppose $\mathbb{E}[X] = 0$ et $\mathbb{E}[X^4] < \infty$. Le but de l'exercice est de démontrer la loi forte des grands nombres pour la suite $(X_n)_n$.

1. Montrer que, pour tout n , $\mathbb{E}[S_n^4] = n\mathbb{E}[X^4] + 3n(n-1)\mathbb{E}[X^2]^2$. (développer...)
2. Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|S_n| > n\varepsilon) = \mathbb{P}(|S_n|^4 > n^4\varepsilon^4) \leq \frac{\mathbb{E}[S_n^4]}{n^4\varepsilon^4} \sim_n \frac{3\mathbb{E}[X^2]^2}{n^2\varepsilon^4}.$$

3. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, en prenant $\varepsilon = 1/p$, par Borel-Cantelli, il existe p.s. n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, $\frac{|S_n|}{n} \leq \frac{1}{p}$. Comme une intersection dénombrable d'événements presque sûrs est presque sûre, on a : p.s., pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, $\frac{|S_n|}{n} \leq \frac{1}{p}$, c'est à dire que la suite $(S_n/n)_n$ converge vers 0.

Exercice 3 Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{1}{\ln n} \max_{1 \leq k \leq n} X_k - \frac{1}{\lambda} > \varepsilon\right) &= \mathbb{P}\left(X_k > \left(\frac{1}{\lambda} + \varepsilon\right) \ln n\right)^n \\ &= \exp(-n(1 + \lambda\varepsilon) \ln n) \rightarrow_n 0 \end{aligned}$$

et, si $\varepsilon < 1/\lambda$:

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{\ln n} \max_{1 \leq k \leq n} X_k - \frac{1}{\lambda} < -\varepsilon\right) = (1 - \exp(-(1 - \lambda\varepsilon) \ln n))^n = \exp(n \ln(1 - \frac{1}{n^{1-\varepsilon\lambda}})) \rightarrow_n 0,$$

et cette proba est nulle si $\varepsilon > 1/\lambda$.

2. Pour $t \leq 0$, $\mathbb{P}(Z_n \leq t) = 0$ et on a, pour tout $t > 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_n \leq t) &= \mathbb{P}\left(X_k - \frac{\ln n}{\lambda} \leq t\right)^n \\ &= \left(1 - \frac{e^{-\lambda t}}{n}\right)^n \rightarrow_n e^{-e^{-\lambda t}}. \end{aligned}$$

Donc Z_n converge en loi vers la loi ayant pour fonction de répartition $F(t) = e^{-e^{-\lambda t}} \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(t)$.
 En dérivant, on voit que c'est aussi la loi de densité $\lambda e^{-\lambda t} e^{-e^{-\lambda t}} \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(t)$. Il s'agit d'une loi de Gumbel.

Exercice 4

1. Si $(X_n)_n$ converge en loi vers la variable aléatoire constante c , alors : pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|X_n - c| > \varepsilon) = 1 - \mathbb{P}(c - \varepsilon < X_n < c + \varepsilon) \rightarrow_n 0$$

par convergence des fonctions de répartition aux points de continuité de la limite (ici, partout sauf en c).

2. X de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Alors $-X$ a même loi, donc la suite $X_n = (-1)^n X$ converge en loi vers X ; or $X_n - X = 0$ si n est pair et $-2X$ si n est impair donc la suite $\mathbb{P}(|X_n - X| > 1)$ ne converge pas vers 0.

Exercice 5

1. Par la loi des grands nombres (X_1 intégrable) on a $\bar{X}_n \xrightarrow{ps} \mathbb{E}[X_1] = 1/\lambda$. Donc $Z_n \xrightarrow{ps} \lambda$.

2. Par le T.C.L. si $S_n = n\bar{X}_n$ alors

$$\frac{S_n - n\mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{n}} \sim N(0, \sigma(X_1))$$

donc $\bar{X} \sim N(1/\lambda, \frac{1}{\sqrt{n}\lambda})$.

3. La fonction $x \mapsto \int_{-x}^x e^{-t^2/2} dt / \sqrt{2\pi}$ est continue, croissante de 0 à 1 donc le théorème des valeurs intermédiaires (si I intervalle de \mathbb{R} et f définie sur I à valeurs réelles et continue alors $f(I)$ est un intervalle.)

4. $\sqrt{n}\lambda(\bar{X} - 1/\lambda) \sim N(0, 1)$ donc

$$\mathbb{P}(\sqrt{n}\lambda|\bar{X} - 1/\lambda| < \phi) = 0.95$$

c'est à dire $\mathbb{P}(|\bar{X} - 1/\lambda| < \phi/(\sqrt{n}\lambda)) = 0.95$ donc $\beta = \phi/(\sqrt{n}\lambda)$.

5. $\mathbb{P}(1/\lambda + \phi/(\sqrt{n}\lambda) \leq \bar{X} \leq 1/\lambda + \phi/(\sqrt{n}\lambda)) = 0.95$ est équivalent à

$$\mathbb{P}(\lambda(1/(1 + \phi/\sqrt{n})) \leq Z_n \leq \lambda(1/(1 - \phi/\sqrt{n}))) = 0.95$$

donc on pose

$$\alpha_1 = \lambda(1/(1 + \phi/\sqrt{n})) \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \lambda(1/(1 - \phi/\sqrt{n})).$$

6. $\phi/\sqrt{n} = 0.0196$ donc $\alpha_1 = 0.98$ et $\alpha_2 = 1.02$ d'où $J = [0.98\lambda, 1.02\lambda]$.