1 Dans le plan complexe

1. Déterminer le lieu géométrique représenté par :
   (a) $|z-2| = 3$
   (b) $|z-2| = |z+4|$
   (c) $|z-3| + |z+3| = 10$
2. Déterminer le domaine du plan représenté par chacune des inégalités suivantes :
   (a) $|z| < 1$
   (b) $1 < |z+2i| \leq 2$
   (c) $\frac{\pi}{3} \leq Arg(z) \leq \frac{\pi}{2}$
3. Représenter chacune des fonctions suivantes sous la forme $u(x,y) + iv(x,y)$, où u et v sont réels :
   (a) z^3
   (b) $\frac{1}{1-z}$
   (c) e^{3z}
   (d) $\ln(z)$
4. Démontrer les relations suivantes :
   (a) $\sin(x+iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$
   (b) $\cos(x+iy) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$

2 Dérivées, Équations de Cauchy-Riemann

1. Démontrer que $\frac{d}{dz}\overline{z}$, où $\overline{z}$ est le conjugué de z, n'existe nulle part.
2. Démontrer qu'une condition nécessaire pour que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ soit holomorphe dans ouvert Ω est que les conditions de Cauchy-Riemann[1] soient satisfaites en tout point du domaine.
3. À l'aide des conditions de Cauchy-Rieman, déterminer le domaine où les fonctions suivantes sont dérivables, et calculer leur fonction dérivée :
   (a) $f(z) = z - \overline{z}$
   (b) $f(z) = az^2 + b$
   (c) $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$
4. Si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ est holomorphe dans un ouvert Ω, démontrer ques les familles de courbes à un paramètre $u(x,y) = C_1$ et $v(x,y) = C_2$ sont des familles orthogonales - application à $f(z) = z^2$.
5. Soient Ω un ouvert du plan complexe et f une fonction holomorphe sur Ω. On pose, pour $z \in \overline{\Omega}$, $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$. Montrer que g est holomorphe sur $\overline{\Omega}$.
6. Soit $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ une fonction holomorphe dans un ouvert Ω. Montrer qu'alors u et v sont harmoniques[2].
7. Si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ est holomorphe telle que $u(x,y) = x^2 + 4x - y^2 + 2y$, déterminer v puis en déduire f.
8. Soit $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ une fonction holomorphe dans un ouvert connexe Ω. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
   (a) f est constante
   (b) u est constante
   (c) v est constante

[1] $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$

[2] u est harmonique si $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = 0$

(d) $\overline{f}$ est holomorphe

(e) $|f|$ est constante

9. Soient a, b et c trois réels. Pour $z = x + iy$, on pose : $P(z) = ax^2 + 2bxy + cy^2$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour qu'il existe une fonction holomorphe f dont la partie réelle est donnée par P.
Lorsque cette condition est remplie, déterminer toutes les fonctions f solutions.

10. Calculer les intégrales $I = \int_C f(z)dz$ dans les cas suivants :

(a) $f(z) = \dfrac{z+2}{z}$ et C est le demi-cercle $z = 2e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$

(b) $f(z) = \dfrac{z+2}{z}$ et C est le demi-cercle $z = 2e^{i\theta}$, $\pi \leq \theta \leq 2\pi$

(c) $f(z) = \dfrac{z+2}{z}$ et C est le cercle $z = 2e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

3 Problème

Dans ce problème, on identifie $\mathbf{R^2}$ et $\mathbf{C}$ via l'application $(x, y) \mapsto x + iy$. Soient Ω un ouvert de $\mathbf{C}$ et $f \in C^1(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbf{C}$. On note :

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}).$$

1. Montrer que $\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}} = \overline{(\dfrac{\partial f}{\partial z})}$.

2. Montrer que f est holomorphe si et seulement si $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$.

3. * Montrer que si f est holomorphe, alors $f'(z) = \dfrac{\partial f}{\partial z}(z)$.

4. On dit que f est antiholomorphe si $\overline{f}$ est holomorphe. Montrer que f est antiholomorphe si et seulement si $\dfrac{\partial f}{\partial z} = 0$.

5. Soit f de classe C^2. Montrer que $\Delta f = 4\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}}$.

6. On suppose que f est une fonction holomorphe. Montrer que $\Delta |f|^2 = 4|f'(z)|^2$.

7. On considère $f_1, \cdots, f_p$ des fonctions holomorphes dans un ouvert connexe Ω. On suppose que $|f_1|^2 + \cdots + |f_p|^2$ est constante. Montrer qu'alors chaque fonction f_j est constante.