Université d'Orléans — **Analyse II**
3A — **1er semestre 2009/2010**

Feuille d'exercices n^{o}1 — Analyse vectorielle

I: Champs vectoriels

Exercice 1 : Représenter graphiquement les champs vectoriels définis sur $\mathbb{R}^2$ suivants:

a) $\vec{F}(x,y) = (y,x)$
b) $\vec{F}(x,y) = (2x-3y, 2x+3y)$
c) $\vec{F}(x,y) = (\sin x, \sin y)$
d) $\vec{F}(x,y) = (\ln(1+x^2+y^2), x)$

Exercice 2 : Représenter graphiquement les champs vectoriels définis sur $\mathbb{R}^3$ suivants:

a) $\vec{F}(x,y,z) = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$
b) $\vec{F}(x,y,z) = \vec{i} + 2\vec{j} + z\vec{k}$
c) $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + 3\vec{k}$
d) $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Exercice 3 : Définir les champs de gradients des fonctions suivantes:

a) $f(x,y) = e^{3x}\cos(4y)$
b) $f(x,y) = \sin(2x+3y)$
c) $f(x,y,z) = xy^2 - yz^3$
d) $f(x,y,z) = x\ln(y-z)$

Exercice 4 : Définir et représenter graphiquement les champs de gradients des fonctions suivantes

a) $f(x,y) = x^2 - \frac{1}{2}y^2$
b) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$

II: Intégrales curvilignes

Exercice 5 : Calculer $\displaystyle\int_C y^2dx + xdy$ où

a) C est le segment qui relie $(-5,-3)$ à $(0,2)$
b) C est l'arc de parabole d'équation $x = 4 - y^2$ depuis $(-5,-3)$ jusqu'à $(0,2)$.

Exercice 6 : Calculer $\displaystyle\int_C y\sin z ds$ où C est l'hélice circulaire décrite par les équations $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t$ pour $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Exercice 7 : Calculer $\displaystyle\int_C ydx + zdy + xdz$ où C se compose du segment C_1 de $(2,0,0)$ à $(3,4,5)$ suivi du segment vertical C_2 de $(3,4,5)$ à $(3,4,0)$.

Exercice 8 : Calculer $\displaystyle\int_C \vec{F}\vec{dr}$ où $\vec{F}(x,y,z) = xy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}$ et C est la cubique décrite par les équations $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Exercice 9 : Déterminer si les champs vectoriels suivants sont conservatifs :

a) $\vec{F}(x,y) = (x-y)\vec{i} + (x-2)\vec{j}$
b) $\vec{F}(x,y) = (3+2xy)\vec{i} + (x^2-3y^2)\vec{j}$.

Exercice 10 :

a) Déterminer une fonction f telle que $\vec{F} = \vec{\nabla} f$ si $\vec{F}(x,y) = (3+2xy)\vec{i} + (x^2-3y^2)\vec{j}$.

b) Calculer l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_C \vec{F}\vec{dr}$ où C est la courbe décrite par $r(t) = e^t\sin t\vec{i} + e^t\cos t\vec{j}$ pour $0 \leqslant t \leqslant \pi$.

Exercice 11 : Déterminer une fonction f telle que $\vec{F} = \vec{\nabla} f$ où $\vec{F}(x,y,z) = y^2\vec{i} + (2xy + e^{3z})\vec{j} + 3ye^{3z}\vec{k}$.

III: Théorème de Green

Exercice 12 : Calculer $\oint_C (3y - e^{\sin x})dx + (7x + \sqrt{y^4+1})dy$ où C est le cercle $x^2 + y^2 = 9$.

Exercice 13 : Calculer l'aire du domaine limité par l'ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a \neq 0, b \neq 0)$.

Exercice 14 : Calculer $\int_C y^2 dx + 3xydy$ où C est la frontière du demi-anneau circulaire supérieur formé par les cercles $x^2 + y^2 = 1$ et $x^2 + y^2 = 4$.

IV: La divergence et le rotationnel

Exercice 15 : Vérifier que si le champs vectoriel $\vec{F}(x,y,z) = xz\vec{i} + xyz\vec{j} - y^2\vec{k}$ n'est pas conservatif.

Exercice 16 :

a) Vérifier que $\vec{F}(x,y,z) = y^2z^3\vec{i} + 2xyz^3\vec{j} + 3xy^2z^2\vec{k}$ est un champ vectoriel conservatif.

b) Déterminer une fonction f telle que $\vec{F} = \vec{\nabla} f$.

Exercice 17 : Calculer $div\ \vec{F}$ si $\vec{F}(x,y,z) = xz\vec{i} + xyz\vec{j} - y^2\vec{k}$.

Exercice 18 : Démontrer que le champ vectoriel $\vec{F}(x,y,z) = xz\vec{i} + xyz\vec{j} - y^2\vec{k}$ ne peut pas être écrit comme le rotationnel d'un autre champ vectoriel.

V: Intégrales de surface

Exercice 19 : Calculer l'intégrale de surface $\iint_S x^2 dS$ où S est la sphère unité $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Exercice 20 : Calculer $\iint_S ydS$ où S est la surface $z = x + y^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant 2$.

Exercice 21 : Calculer $\iint_S zdS$ où S est la surface dont la partie latérale S_1 est le cylindre $x^2 + y^2 = 1$, le fond S_2, le disque $x^2 + y^2 \leqslant 1$ et la partie supérieure S_3, la portion du plan $z = x + 1$ qui domine S_2.

Exercice 22 : Calculer le flux du champ $\vec{F}(x,y,z) = z\vec{i} + y\vec{j} + x\vec{k}$ à travers la sphère unité $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

VI: Théorèmes de Stokes et flux-divergence

Exercice 23 : Calculer $\int_C \vec{F}\vec{dr}$ où $\vec{F}(x,y,z) = -y^2\vec{i} + x\vec{j} + z^2\vec{k}$ et C est la courbe d'intersection du plan $y + z = 2$ avec le cylindre $x^2 + y^2 = 1$. (Orienter C dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, vu d'en haut).

Exercice 24 : Calculer (autrement qu'à l'ex. 22) le flux du champ vectoriel $\vec{F}(x,y,z) = z\vec{i} + y\vec{j} + x\vec{k}$ sur la sphère unité $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Exercice 25 : Calculer $\iint_S \vec{F}.d\vec{S}$ où $\vec{F}(x,y,z) = xy\vec{i} + (y^2 + e^{xz^2})\vec{j} + \sin(xy)\vec{k}$ et où C est la surface de la région solide bornée par le cylindre parabolique $z = 1 - x^2$ et les plans $z = 0$, $y = 0$ et $y + z = 2$