Université d'Orléans
UFR Sciences
Département de Mathématiques

Licence 1 – Semestre 1
septembre 2010

SLO1MA12 – Introduction au raisonnement mathématique 2 - Analyse
TD 1 – Exercices sur les fonctions usuelles

Graphes, composition, dérivation.

Exercice 1.

1. Sur un même dessin, tracer le graphe des fonctions suivantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:
$$x \mapsto x, \qquad x \mapsto x^2, \qquad x \mapsto x^3, \qquad x \mapsto x^4, \qquad x \mapsto x^5.$$
2. Sur un même dessin, tracer le graphe des fonctions suivantes de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$:
$$x \mapsto x^{-1}, \qquad x \mapsto x^{-2}, \qquad x \mapsto x^{-3}, \qquad x \mapsto x^{-4}, \qquad x \mapsto x^{-5}.$$
3. Sur un même dessin, tracer le graphe des fonctions suivantes de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$:
$$x \mapsto x, \qquad x \mapsto x^2, \qquad x \mapsto x^3, \qquad x \mapsto x^{1/2}, \qquad x \mapsto x^{1/3}.$$

Exercice 2. Tracer le graphe des fonctions suivantes :
$$f : x \mapsto 3x + 1, \qquad f : x \mapsto -2x^2 + 4x + 1, \qquad f : x \mapsto x^3 - x, \qquad f : x \mapsto x^3 - 3x + 1.$$

Exercice 3. Discuter le signe des expressions suivantes, suivant les valeurs de $x \in \mathbb{R}$:
$$x^2 + 1, \qquad x^2 - 1, \qquad x^4 - 1, \quad x^2 + 2x - 3, \qquad -x^2 + 2x - 3, \qquad x^2 + 2x + 1$$
$$x^3 - x, \qquad x^3 - 1, \qquad x^3 + 1.$$

Exercice 4. Donner le domaine de définition des fonctions suivantes :
$$f : x \mapsto \ln(1 - x), \qquad f : x \mapsto \ln(1 - x^2), \qquad f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 3x - 4} \qquad f : x \mapsto \frac{x}{1 - \sqrt{1 - x}}.$$

Exercice 5. Tracer le graphe des fonctions suivantes :
$$x \mapsto \frac{1 - x}{1 + x}, \qquad x \mapsto \frac{x}{x^2 + 1}, \qquad x \mapsto \frac{x}{x^2 - 1}, \qquad x \mapsto \frac{x^2 + 3x + 2}{x - 2}, \qquad x \mapsto \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}.$$

Exercice 6. On considère les fonctions f et g définies comme suit :
$$f : x \mapsto \frac{3}{x}, \qquad g : x \mapsto \frac{2 - x}{2 + x}.$$

1. Donner le domaine de définition de f et de g.
2. Déterminer les antécédents de 0 et -2 par f et par g.
3. On pose $f_1 = f \circ f$, $f_2 = f \circ g$, $f_3 = g \circ f$ et $f_4 = g \circ g$.
   Donner le domaine de définition de f_1, f_2, f_3 et f_4, puis donner leur expression.

Exercice 7. Ecrire les fonctions suivantes comme composée de fonctions usuelles.

1. $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$
2. $f : x \mapsto \ln(2\sqrt{x} + 3)$
3. $f : x \mapsto \sqrt{\mathrm{e}^{x-3}}$

Exercice 8. Pour les fonctions suivantes, calculez $(g \circ f)(x)$ et $(f \circ g)(x)$ après avoir précisé les ensembles de définition de f, g, $g \circ f$ et $f \circ g$:

1. $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x - 1$
2. $f(x) = \frac{1}{x+1}$ et $g(x) = 3x$
3. $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$ et $g(x) = \frac{1}{x} + 1$
4. $f(x) = \mathrm{e}^x$ et $g(x) = \frac{1}{x}$
5. $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = x^2 - 6x + 2$

Exercice 9. Donner le domaine de définition des fonctions suivantes puis calculer leur dérivée :

$$\cos(\sqrt{x}), \qquad \ln(x^n + x^2) \qquad \frac{e^x \ln(x)}{x^2 + 2x^3}, \qquad 3^x \sin(x) \qquad \frac{x \ln(x)}{x^2 - 1}, \qquad \sqrt{x^2 - 3x - 4}.$$

Exercice 10. Dériver les fonctions suivantes :

$$x^n, \qquad e^{x^n}, \qquad \ln(x^n + x^2),\ x > 0, \qquad \ln(|x|),\ x \in \mathbb{R}^*, \qquad x\ln(x) - x,\ x > 0, \qquad \ln(\sin^2(x) + 1),$$

$$\cos(\sin(x^2)), \qquad \sin^2(x + \sin(x)), \qquad \frac{x^3 - 3x + 1}{x^4 + 1}, \qquad e^{\sin(3x)}, \qquad \sin(e^{x+2}).$$

Études de fonctions.

Exercice 11. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 2}.$$

1. Donner $\mathcal{D}_f$ le domaine de définition de f.
2. Montrer que $f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x-2}$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, α, β et γ étant trois réels que l'on déterminera.
3. Etudier la fonction f.
4. Etudier la position de son graphe par rapport à la droite d'équation $y = x - 1$.
5. On rappelle que le graphe d'une fonction g admet le point Ω de coordonnées (a, b) comme centre de symétrie si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
   – le domaine de définition de g est symétrique par rapport à a
   – pour tout x appartenant au domaine de définition de g, on a : $f(a - x) + f(a + x) = 2b$.
   Montrer que le point $(2, 1)$ est un centre de symétrie pour le graphe de f.
6. Tracer le graphe de f.

Exercice 12. On considère la fonction

$$f(x) = \frac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}.$$

1. Déterminer les réels a et b pour que le graphe de f soit tangent à la droite d'équation $y = 4x + 3$ au point $(0, 3)$.
2. On considère maintenant
   $$f(x) = \frac{3x^2 + 4x + 3}{x^2 + 1}.$$
   Montrer que $f(x) = \alpha + \frac{\beta x}{x^2+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, α et β étant deux réels que l'on déterminera.
3. Etudier la fonction f.
4. Etudier la position de son graphe par rapport à la tangente au point $(0, 3)$.
5. Montrer que le point $(0, 3)$ est un centre de symétrie pour le graphe de f.
6. Tracer le graphe de f.

Exercice 13. Sur un même dessin tracer les graphes des fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto x+1$. Montrer que $e^x \geq 1+x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 14. Sur un même dessin tracer les graphes des fonctions $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto x-1$. Montrer que $\ln(x) \leq x-1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 15. Prouver que pour tout x positif ou nul les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}, \qquad 0 \leq e^x - 1 \leq xe^x \qquad 0 \leq e^x - 1 - x \leq \frac{x^2}{2}e^x.$$

Exercice 16. Montrer que $\ln(x) \leq 2\sqrt{x} - 2$ pour tout $x \geq 1$. En conclure que $\lim_{x\to+\infty} \ln(x)/x = 0$.

Exercice 17. Donner l'équation de la tangente au graphe de $x \mapsto \ln(x^2-1)$ au point d'abscisse $x = 2$.

Exercice 18. Donner l'équation de la tangente au graphe de $x \mapsto e^{2x}$ aux points d'abscisses $x = 1, -2, 0$.

Exercice 19. On considère la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{2x^2}{x+2}.$$

On notera $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique.

1. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse $a = 3$.
2. En déduire sans calculatrice une valeur approchée du nombre $N = \frac{3{,}002^2}{2{,}001}$

Exercice 20.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x+3 = \sqrt{5-2x}$, puis vérifier graphiquement le résultat.
2. Mêmes questions pour $\sqrt{x^2+x-2} = 1 + \frac{x}{2}$.
3. Démontrer l'inégalité $x + \sqrt{x^2+1} > 0$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 21. Résoudre graphiquement et par le calcul l'équation $|x+3| = |2x-5|$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 22*. Etudier la fonction $x \to e^{-1/x}$.
Vous penserez à faire une recherche de point d'inflexion (en utilisant le critère suivant : x_0 est un point d'inflexion de f si la dérivée seconde de f s'annule en x_0).

Fonctions trigonométriques

Exercice 23. Sur un même dessin, tracer le graphe des fonctions $x \longmapsto x$, $x \longmapsto \sin x$ et $x \longmapsto \tan x$.

Exercice 24. Sur un même dessin, tracer le graphe des fonctions $x \longmapsto x$, $x \longmapsto \operatorname{Arc}\sin x$ et $x \longmapsto \operatorname{Arc}\tan x$.

Exercice 25. A-t-on l'égalité suivante : $\operatorname{Arc}\tan x = \frac{\operatorname{Arc}\sin x}{\operatorname{Arc}\cos x}$?

Exercice 26. Simplifier les expressions suivantes :

(a) $\sin(\operatorname{Arc}\sin x)$ lorsque x est dans $[-1;1]$,

(b) $\operatorname{Arc}\sin(\sin x)$ lorsque x est dans $[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$,

(c) $\operatorname{Arc}\sin(\sin x)$ lorsque x est dans $[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}]$,

(d) $\operatorname{Arc}\sin(\sin x)$ lorsque x est dans $[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}]$,

(e*) $\operatorname{Arc}\sin(\sin x)$ lorsque x est dans $\mathbb{R}$.

Exercice 27. Quelle est la période des fonctions suivantes :

$$x \longmapsto \cos 2x\,, \quad x \longmapsto \sin 3x\,, \quad x \longmapsto \cos \tfrac{x}{2}\,, \quad x \longmapsto \sin \tfrac{x}{3}\,, \quad x \longmapsto (\cos x)^2, \quad x \longmapsto (\sin x)^3.$$

Exercice 28*. Soient $\omega \in \mathbb{R}^*$ et $\phi \in \mathbb{R}$.
Quelle est la période de la fonction $x \longmapsto \cos(\omega x + \phi)$?

Exercice 29. On considère la fonction f définie par $f(x) = 2\sin(3x) - 5\cos(3x)$.

1. Calculer f' la dérivée de f puis f'' la dérivée de f'.
2. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout x, on a : $f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0$.

Exercice 30. Etudier les fonctions suivantes :

(a) $x \longmapsto 2\cos x + \sin 2x$.

(b) $x \longmapsto \cos 2x - 2\cos x$.

(c) $\sec x = \frac{1}{\cos x}$,

(d) $\mathrm{cotan} x = \frac{1}{\tan x}$.

(e) $x \longmapsto |\sin x|$.

(f) $x \longmapsto \sin \frac{1}{x}$.

Exercice 31. Démontrer les inégalités suivantes :

1. $\mathrm{Arc}\sin x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ si $0 < x < 1$,
2. $\mathrm{Arc}\tan x > \frac{x}{1+x^2}$ si $x > 0$.

Exercice 32. Etablir les identités suivantes et préciser leur domaine de validité :

(a) $\cos(\mathrm{Arc}\sin x) = \sqrt{1-x^2}$, $\sin(\mathrm{Arc}\cos x) = \sqrt{1-x^2}$.

(b) $\cos(\mathrm{Arc}\tan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\sin(\mathrm{Arc}\tan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

(c) $\tan(\mathrm{Arc}\sin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\tan(\mathrm{Arc}\cos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

(d) $\mathrm{Arc}\cos x = \mathrm{Arc}\sin\sqrt{1-x^2}$, $\mathrm{Arc}\sin x = \mathrm{Arc}\cos\sqrt{1-x^2}$.

(e) $\sin(2\,\mathrm{Arc}\cos x) = 2x\sqrt{1-x^2}$, $\cos(2\,\mathrm{Arc}\sin x) = 1 - 2x^2$.

(f) $\sin^2(\frac{1}{2}\,\mathrm{Arc}\cos x) = \frac{1}{2}(1-x)$, $\cos^2(\frac{1}{2}\,\mathrm{Arc}\cos x) = \frac{1}{2}(1+x)$.

(g) $\mathrm{Arc}\tan x = \mathrm{Arc}\sin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $\mathrm{Arc}\tan x = \mathrm{Arc}\cos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

(h) $\mathrm{Arc}\sin x = 2\ \mathrm{Arc}\tan\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$, $\mathrm{Arc}\cos x = 2\ \mathrm{Arc}\tan\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x}$, $\mathrm{Arc}\tan x = 2\ \mathrm{Arc}\tan\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}$.

Exercice 33. (a) Montrer que la fonction $f(x) = \mathrm{Arc}\tan x + \mathrm{Arc}\tan\frac{1}{x}$ a une dérivée nulle sur $]\,0, +\infty\,[$.
(b) En déduire que f est constante sur $]\,0, +\infty\,[$.
(c) Evaluer cette constante en $x = 1$.
(c) Montrer de même que f est constante sur $]-\infty, 0\,[$ puis évaluer cette constante.

Exercice 34. Montrer (de deux manières) que pour tout x dans $[-1; 1]$, $\mathrm{Arc}\sin(x) + \mathrm{Arc}\cos(x) = \frac{\pi}{2}$

Université d'Orléans
UFR Sciences
Département de Mathématiques

Licence 1 – Semestre 1
septembre 2010

SLO1MA12 – Introduction au raisonnement mathématique 2 - Analyse
TD 2 – Les réels - Axiome de la borne supérieure

Exercice 1. À l'aide des définitions et propriétés relatives à la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ vérifier que l'on a bien les relations suivantes :

1. $0 \leq x$ et $y \leq 0 \Rightarrow xy \leq 0$.
2. $x \leq 0$ et $y \leq 0 \Rightarrow xy \geq 0$.
3. $0 \leq x^2$.
4. $xy \leq \frac{x^2+y^2}{2}$.
5. $x \leq y \Rightarrow x \leq \frac{x+y}{2} \leq y$.

Exercice 2. Démontrer que :

$$\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}, \text{ et } \min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$$

Montrer que $\max(x,y,z) = \max(\max(x,y),z)$. En déduire une formule pour $\max(x,y,z)$.

Exercice 3. Soient x et y deux réls quelconques. Montrer, en utilisant l'inégalité triangulaire, que :

$$2|x| \leq |x+y| + |x-y|$$

En déduire que : $|x| + |y| \leq |x+y| + |x-y|$.

Exercice 4. Soit f et g deux fonctions réelles telle que $\mathcal{I}(f) \subset \mathcal{D}(g)$ et soient I un sous ensemble de $\mathcal{D}(f)$ et J un ensemble contenant $\mathcal{I}(f)$. Montrer que :

1. Si f est croissante sur I et g est croissante sur J alors $g \circ f$ est croissante sur I.
2. Si f est décroissante sur I et g est décroissante sur J alors $g \circ f$ est croissante sur I.
3. Si f est croissante sur I et g est décroissante sur J alors $g \circ f$ est décroissante sur I.
4. Si f est décroissante sur I et g est croissante sur J alors $g \circ f$ est décroissante sur I.
5. Appliquer les résultats des questions précédentes pour trouver le sens de variations des fonctions suivantes :
   (a) $h(x) = \sin x^2$ sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.
   (b) $h(x) = \exp(x^2 - 4x - 21)$ sur $\mathbb{R}$.
   (c) $h(x) = \cos^2 x + 2\cos x - 3$ sur $\mathbb{R}$.
   (d) $h(x) = (\sin x)^2$ sur $[0, 2\pi]$.
   (e) $h(x) = |x^2 - 4x - 21|$ sur son domaine de définition.

Exercice 5. Les assertions suivantes sont-elles exactes ?

1. $\exists A \in \mathbb{R}$ tel que $(\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \sqrt{n} \leq A)$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists A \in \mathbb{R}$, tel que $\sqrt{n} \leq A$
3. $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} \leq x$
4. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}$ tel que $2x + 1 \leq y$
5. $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $(\forall y \in \mathbb{R}\ ,\ 2x + 1 \leq y)$
6. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}$ tel que $y^2 \leq x$
7. $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $\left(\forall y \in \mathbb{R}\ ,\ y^2 \leq x\right)$

Exercice 6. Pour chaque assertion P qui suit, écrire sa négation. Déterminer alors qui de P ou $non(P)$ est VRAIE.

1. $\exists n \in \mathbb{N}\ \forall p \in \mathbb{N}\ p \leq n$
2. $\forall x \in \mathbb{R}\ (2x-1)^2 > 0$
3. $\forall x \in \mathbb{Z}\ (2x-1)^2 > 0$
4. $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\ a \geq b \Rightarrow (a+c \geq b+c)$
5. $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\ a \geq b \Rightarrow (ac \geq bc)$

Exercice 7. Traduire à l'aide de quantificateurs les expressions suivantes :

1. A est une partie majorée de $\mathbb{R}$.
2. B est n'est pas une partie majorée de $\mathbb{R}$.
3. C est une partie minorée de $\mathbb{R}$.
4. D est n'est pas une partie minorée de $\mathbb{R}$.
5. E est une partie bornée de $\mathbb{R}$.
6. F est n'est pas une partie bornée de $\mathbb{R}$.

Exercice 8. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$. Montrer que : $|x-a| < \epsilon \Leftrightarrow x \in]a-\epsilon\ ,\ a+\epsilon[$

Exercice 9. Montrer que :

$$(\forall \epsilon > 0, x \in]a-\epsilon\ ,\ a+\epsilon[) \Leftrightarrow x = a$$

Exercice 10. Écrire sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles, les ensembles suivants :

$$A = \left\{x \in \mathbb{R}\ ;\ |x+4| \leq \tfrac{3}{2}\right\} \qquad B = \left\{x \in \mathbb{R}\ ;\ |3-x| \geq \tfrac{3}{2}\right\} \qquad C = \left\{x \in \mathbb{R}\ ;\ |2x+1| \leq \tfrac{5}{2}\right\}$$

Exercice 11.

1. Montrer que si I est l'intervalle $[a;b[$, alors $\sup(I) = b$.
2. Montrer que si I est l'intervalle $]a;b]$, alors $\inf(I) = a$.

Exercice 12.

1. Soit $I \subset \mathbb{R}$. Réécrire à l'aide des quantificateurs la phrase " I n' est pas un intervalle de $\mathbb{R}$ ".
2. La réunion de deux intervalles est elle un intervalle ?
3. L'intersection de deux intervalles est elle un intervalle ?
4. Soit $A := \left\{n + \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}^*\right\}$. A est-il un intervalle de $\mathbb{R}$? Donner s'ils existent, $\inf A$ et $\sup A$.

Exercice 13. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = exp(-x^2)$. Étudier les variations et les limites de f. On considère l'ensemble $A = \{f(x), x \in \mathbb{R}\}$. Déterminer les bornes supérieures et inférieures de A. L'ensemble A possède-t-il un minimum, un maximum ?

Exercice 14. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x \cos x$ est-elle majorée ? minorée ?

Exercice 15. Soient f et g deux fonction numériques définies sur une même partie A de $\mathbb{R}$.

1. Prouver que si $f \leq g$ et si f est minorée sur A, alors g est minorée sur $\inf(f) \leq \inf(g)$
2. Prouver que si f est majorée sur A alors $-f$ est minorée sur A et $\inf(f) = -\sup(f)$
3. Prouver que si f et g sont toutes deux majorées sur A alors, alors $f+g$ est majorée sur A et :

$$\sup(f+g) \leq \sup(f) + \sup(g)$$

4. Prouver que si $\lambda > 0$ alors $\sup(\lambda.f) = \lambda.\sup(f)$

Exercice 16. Soit $f : [0;1] \to [0;1]$ une application croissante. On considère alors l'ensemble suivant : $A = \{x \in [0;1]\ |\ x \leq f(x)\}$.

1. Montrez que A admet une borne supérieure (que l'on notera a par la suite).
2. Montrez que : $a \in [0;1]$.
3. Montrez que $f(a)$ est un majorant de A. En déduire que $a \in A$.
4. On veut montrer que a est un point fixe de f, c'est à dire que $f(a) = a$.
   (a) Supposez que $a = 1$. Montrez qu'alors que $f(1) = 1$.
   (b) Supposez cette fois-ce que $a \in [0;1[$. Montrez qu'alors $f(a)$ est un minorant de $]a;1]$ puis déduisez-en que $f(a) = a$.

Exercice 17. Démontrer que $\mathbb{Z}$ est une partie non majorée de $\mathbb{R}$.
En déduire que $\mathbb{R}$ est **archimédien**, c'est à dire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \ \forall y \in \mathbb{R},\ \ \exists n \in \mathbb{N}\ \mid\ nx > y$$

Exercice 18. Considérons A l'ensemble des termes de la suite $u_n = \frac{n-1}{n}$:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, \exists n \in \mathbb{N}^*\ \ x = \frac{n-1}{n}\}$$

1. Montrer que A possède une borne supérieure.
2. Démontrer que cette borne supérieure vaut 1.

Exercice 19. Déterminer les bornes inférieures et supérieures des ensembles suivants :

$$E = \{\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{n},\ n \in \mathbb{N}\}$$

$$F = \{\frac{1-(-1)^n}{n} - n^2,\ n \in \mathbb{N}\}$$

Exercice 20. Déterminer (s'ils existent) les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le maximum, le minimum des sous–ensembles suivants de $\mathbb{R}$:

$$[0,1]\,,\quad]0,1[\,,\quad [0,1[\,,\quad]0,1[\,,$$
$$\mathbb{N}\,,\quad \mathbb{Z}\,,\quad \mathbb{Q}\,,\quad [0,+\infty[\,,\quad]0,+\infty[\,,$$
$$[0,1]\cap\mathbb{Q}\,,\quad]0,1[\,\cap\mathbb{Q}\,,$$
$$\left\{\tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\},\quad \left\{(-1)^n + \tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\},$$
$$\left\{\sin x \mid x \in \mathbb{R}\right\},\quad \left\{e^x \mid x \in \mathbb{R}\right\},\quad \left\{\tfrac{1}{x^2+1} \mid x \in \mathbb{R}\right\},$$
$$\left\{\tfrac{x}{x^2+1} \mid x \in \mathbb{R}\right\},\quad \left\{\operatorname{Arc}\tan x \mid x \in \mathbb{R}\right\},\quad \left\{\ln \tfrac{x}{x+1} \mid x \in \mathbb{R}_+^*\right\}.$$

Exercice 21. Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $B = \{-a \mid a \in A\}$. Montrer que A est majorée si et seulement si B est minorée et que, dans ce cas, $\sup A = -\inf B$.

Exercice 22. Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $B = \{-a \mid a \in A\}$. Montrer que A est minorée si et seulement si B est majorée et que, dans ce cas, $\inf A = -\sup B$.

Exercice 23. Soient $A \subset B$ des parties non vides de $\mathbb{R}$.

1. Si B est majorée, montrer que A est majorée et que $\sup A \leq \sup B$.
2. Enoncer et établir un résultat analogue pour la borne inférieure.

Exercice 24.

1. Soient A et B deux parties non vides majorées dans $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que leur réunion $A \cup B$ est majorée. Etablir les inégalités
   $$\sup A \leq \sup(A \cup B) \quad \text{et} \quad \sup B \leq \sup(A \cup B).$$
   En déduire que $\max(\sup A, \sup B) \leq \sup(A \cup B)$
   (b) Que vaut $\sup(A \cup B)$?
2. Énoncer et démontrer les résultats analogues pour des parties A et B minorées.

Exercice 25. Soient A et B des parties non vides majorées de $\mathbb{R}$. On note $A+B := \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$.
1. Montrer que $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A+B$.
2. Montrer que $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$. Enoncer et démontrer les résultats analogues pour des parties A et B minorées de $\mathbb{R}$.

Exercice 26. Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $B = \{|x| \text{ tel que } x \in A\}$. Peut-on affirmer que :
$$\sup A \text{ existe } \Rightarrow \sup B \text{ existe}$$

Exercice 27. Soit A une partie non vide bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble $\{|x-y|, (x,y) \in A^2\}$ admet une borne supérieure. On appelle diamètre de A, noté $d(A)$ cette borne supérieure.
Montrer que si B est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et A une partie bornée de, alors : $(B \subseteq A) \Rightarrow (d(B) \leq d(A))$.

Exercice 28. Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. Les propositions suivantes sont-elles exactes ?

1. $A \subset B \Rightarrow \sup(A) \leq \sup(B)$
2. $A \subset B \Rightarrow \inf(A) \leq \inf(B)$
3. $\sup(A+B) < \sup(A) + sup(B)$
4. $\sup(-A) = -sup(A)$
5. $inf(-B) = -sup(B)$
6. $\sup(A) + inf(B) \leq \sup(A+b)$

Exercice 29*. Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et B une partie non vide de $\mathbb{R}^{+*}$. On note $A : B$ l'ensemble des quotients d'un élément de A par un élément de B :
$$A : B = \{\frac{a}{b}, a \in A, b \in B\}$$
1. Montrer que si m est un minorant de A et M un majorant de B, alors m/M est un majorant de $A : B$.
2. Montrer que si B n'est pas majorée, alors :
$$\forall \epsilon > 0, \ \exists x \in A : B, \ |x| < \epsilon$$
3. Montrer que si $A \subset \mathbb{R}^+$ et si B n'est pas majorée, alors $\inf(A : B) = 0$.
4. Montrer que si $A \neq \{0\}$ et si $\inf(B) = 0$, alors $A : B$ n'est pas bornée.
5. On suppose que A et B sont deux intervalles. Montrer que $A : B$ est un intervalle.
6. Soit ϵ un réel strictement positif. On pose $A = [-\epsilon; +\epsilon]$ et $B =]0; \epsilon]$. Montrer qu'alors $A : B = \mathbb{R}$.

Exercice 30. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que :
$$\forall x \in A \, ; \forall y \in B \ : x \leq y$$

1. Prouver l'existence de $\sup A$ et de $\inf B$ et montrer que : $\sup A \leq \inf B$
2. Montrer que : ($\sup A = \inf B$) si et seulement si ($\forall \epsilon > 0 \;\; \exists (x, y) \in A \times B$ tel que $|x - y| \leq \epsilon$)
   Remarque : on dit alors que A et B sont deux parties adjacentes.

Problème 1.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*}$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $x < p$.
   Indication : on pourra considérer l'ensemble $B = \{ \; n \in \mathbb{N} | x \geq n\}$.

2. En déduire que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x > 0$ il existe n tel que $y \leq nx$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier relatif p tel que :

$$p \leq x < p + 1.$$

   Cette entier est appelé la **partie entière** de x, notée $E(x)$ ou $[x]$.
   Applications :

   (a) Représentez les graphes des fonction suivantes :

   $x \mapsto \mathrm{E}(x)$ pour $x \in [0; +\infty[$ $\quad$ $x \mapsto \frac{x}{\mathrm{E}(x)}$ pour $x \in [1; +\infty[$ $\quad$ $x \mapsto \mathrm{E}(x) - x$ pour $x \in [0; +\infty[$

   (b) Montrer que la fonction partie entière $x \mapsto \mathrm{E}(x)$ est croissante ($a \leq b \Rightarrow E(a) \leq E(b)$).

   (c) Montrer que pour tout réel x et tout entier naturel n non nul :

$$E\left(\frac{1}{n}E(nx)\right) = E(x)$$

4. Montrer que pour tout $0 < a < b$ il existe un rationnel x tel que $a < x < b$.
   Remarque : on dit alors que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Université d'Orléans
UFR Sciences
Département de Mathématiques

Licence 1 – Semestre 1
Tronc commun Maths – Info

SLO1MA12 – Introduction au raisonnement mathématique 2
Feuille d'exercices sur les suites

I. Utiliser les définitions.

Exercice 1. Déterminer dans chaque cas, si la suite (u_n) définie par la relation proposée, converge, diverge ou n'a pas de limite.

1. $u_n = \frac{n-2}{n+1}$.
2. $u_n = e^{-2n}$.
3. $u_n = (-1)^n$.
4. $u_n = n^2 - 2n$.
5. $u_n = \frac{3}{4-n} - 3$ pour n$\geq$ 5.
6. $u_n = \frac{2n+1}{n+4}$.
7. $u_n = 3n^2 - \sqrt{n} + 1$.
8. $u_n = \frac{n^2}{n+1}$.
9. $u_n = -2n^2 + 5n + 1$.
10. $u_n = \frac{2n^2-n+1}{n+1}$.
11. $u_n = sin\frac{n\pi}{2}$.
12. $u_n = (-2)^n$.

Exercice 2. Etudier la convergence éventuelle de la suite (u_n) définie pour tout entier n par :

$$u_n = sin(n)$$

Exercice 3. Montrer que si une suite convergente vers -1, alors tous ses termes sont négatifs à partir d'un certain rang.

Exercice 4. Montrer que si une suite convergente vers une limite L strictement positive, alors tous ses termes sont positifs à partir d'un certain rang.

Exercice 5. Monter qu'une suite bornée ne tend pas vers $-\infty$, ou $+\infty$.

Exercice 6. Montrer que toute suite convergente est bornée.

Exercice 7. Soit (u_n) une suite de $\mathbb{R}$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. Si (u_n) converge vers un réel l, alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers le même réel.
2. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent, alors il en est de même de (u_n).
3. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite, alors il en est de même de (u_n).

Exercice 8.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive telle que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n^2 = \lambda$, λ étant un nombre réel. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \sqrt{\lambda}$
2. La propriété reste-t-elle vrai si on omet la condition "positive" ?

Exercice 9.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lambda$, λ étant un nombre réel.
   Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_1+u_2+u_3+...+u_n}{n} = \lambda$
2. La propriété reste-t-elle vrai si on remplace λ par $+\infty$?

II. Limites de suites.

Exercice 10. Calculer, lorsqu'elles convergent, les limites des suites définies par :

$u_n = n - \sqrt{n^2 - n}$ $\qquad$ $u_n = \sqrt{n(n+a)} - n$ $\qquad$ $u_n = \dfrac{n}{2} \sin \dfrac{n\pi}{2}$ $\qquad$ $u_n = \dfrac{\sin n^2 - \cos n^3}{n}$ $\qquad$ $u_n = \dfrac{n \sin(n)}{n^2+1}$

Exercice 11. Posons $u_2 = 1 - \frac{1}{2^2}$ et pour tout entier $n \geq 3$,

$$u_n = (1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2}) \cdots (1 - \frac{1}{n^2}).$$

Calculer u_n. En déduire que l'on a $\lim u_n = \frac{1}{2}$.

Exercice 12. Soit x un réel.

1. Déterminer la limite de $u_n = \dfrac{E(x) + E(2x) + \ldots + E(nx)}{n^2}$.
2. En déduire que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

III. Suites définies par récurrence.

Exercice 13. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -2$, et pour tout n de $\mathbb{N}$ par :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\, u_n - \frac{1}{3}$$

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \leq -\frac{2}{3}$
2. En déduire que la suite (u_n) est croissante.
3. Montrer que (u_n) converge vers le nombre réel positif l qui vérifie $\frac{1}{2}\, l = -\frac{1}{3}$ et calculer l.
4. Montrer que la suite (w_n) définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par :

$$w_n = u_n + \frac{2}{3}$$

   est une suite géométrique. En déduire une expression de u_n pour tout n de $\mathbb{N}$.

Exercice 14. Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 8$, et pout tout n de $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_{n+1} = \sqrt{5\, u_n \; - 4}$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n \geq 4$
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. Montrer que (u_n) converge vers une limite à déterminer.

Exercice 15. Soit (u_n) la suite définie par la donnée de u_0, et pout vérifiant tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} = e^{u_n} - 2$$

Etudier, selon les valeurs de u_0, la convergence de cette suite.

Exercice 16. Soit (u_n) la suite définie par la donnée de u_0, et pout vérifiant tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n + 4}$$

Etudier, selon les valeurs de u_0, la convergence de cette suite.

Exercice 17. Soient a et b deux réels vérifiant $0 < a < b$. Soient (u_n) et (w_n) les suites définies par $u_0 = a$, $w_0 = b$ et vérifiant tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n w_n}\ , w_{n+1} = \frac{u_n + w_n}{2}$$

Montrer que les deux suites convergent vers une même limite (que l'on ne cherchera pas à calculer)

Université d'Orléans
UFR Sciences
Département de Mathématiques

Licence 1 – Semestre 1
Tronc commun Maths – Info
Novembre 2010

SLO1MA12 – Introduction au raisonnement mathématique 2
Feuille d'exercices sur les limites et la continuité

Exercice 1.

1. Donner la définition, sous forme quantifiée, des limites suivantes :

   (a) $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$

   (b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

   (c) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

   (d) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

2. Donner dans chaque cas un critère en terme de suites.

Exercice 2. Déterminer les limites suivantes, en justifiant vos calculs.

1. $\lim_{x\to 0^+} \frac{x+2}{x^2\ln x}$
2. $\lim_{x\to 0^+} 2x\ln(x+\sqrt{x})$
3. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-2x^2+3}{x\ln x}$
4. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}+1}}{x+2}$
5. $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$
6. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$
7. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$

Exercice 3. Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - x$
2. $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}$
3. $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}}$
4. $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$
5. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$
6. $\lim_{x\to-\infty} x(\sqrt{1+x^2} - x)$

Exercice 4. Déterminer les limites suivantes :

1. $\frac{x}{2+\sin(\frac{1}{x})}$ en 0
2. $\frac{x^3-3x^2+5x-3}{4x^4+x^2+x-6}$ en 1
3. $\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$ en 0
4. $\frac{1-\cos x}{x^2}$ en 0
5. $\frac{1-\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x-1}$ en $\frac{\pi}{2}$

Exercice 5. Montrer que la fonction $x \to \sqrt{|x|}$, définie sur $\mathbb{R}$, est continue.

Exercice 6. Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$. Montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 7. Soient f et g deux fonctions ayant une limite en x_0. Montrer que la fonction $\sup(f,g)$ admet elle aussi une limite en x_0.

Exercice 8. Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ est strictement croissante puis que pour tout $y \in \;]-1,1[$ il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$.

Exercice 9. Etudier la continuité de f la fonction réelle à valeurs réelles définie par $f(x) = (\sin x)/x$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

Exercice 10. Soit f une fonction continue sur $[a,b[$ telle que $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x) = +\infty$. Montrer que :

$$\forall A \geq f(a), \exists c \in [a,b[\text{ tel que } f(c) = A.$$

Exercice 11. Soit f une fonction continue sur I un intervalle ouvert. Soit $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) > 0$. Montrer qu'il existe un intervalle $J \subset I$ de centre x_0 tel que $f > 0$ sur J.

Exercice 12. Soit f une fonction bornée sur $I = [a, b]$. On définit M par : $\forall x \in I$, $M(x) = \sup_{y\in[a,x]} f(y)$. Montrer que M, définie sur I est croissante. Soit $x_0 \in]a, b[$ un point oï¿½ f est continue et tel que $f(x_0) < M(x_0)$. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert de centre x_0 sur lequel M est constante.

Exercice 13. Soit f une fonction de variable réelle telle que $\frac{f(x)}{|x|} \to \infty$ quand $x \to \infty$. Montrer que pour tout réel α il existe X_α tel que $f(x) - |\alpha x| \geq |x|$ si $|x| \geq X_\alpha$. En déduire que pour tout α réel $f(x) - \alpha x \to \infty$ quand $x \to \infty$.

Exercice 14. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \ g(x) > 0 \text{ et } \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0.$$

1. Montrer que
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} g(x) = 0.$$
2. Montrer que si $L > 0$,
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty.$$

Exercice 15. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout x et x' $(x \neq x')$ de $[a, b]$ on ait : $|f(x) - f(x')| < |x - x'|$.

1. Montrer que f est continue sur $[a, b]$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au plus une seule solution dans $[a, b]$.

Exercice 16. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) = f(b)$. Montrer que la fonction $g(t) = f(t + \frac{b-a}{2}) - f(t)$ s'annule en au moins un point de $[a, \frac{a+b}{2}]$.
Application : une personne parcourt 4 km en 1 heure. Montrer qu'il existe un intervalle de 30 mn pendant lequel elle parcourt exactement 2 km. (On pourra introduire la fonction $f(t) = d(t) - 4t$ où $d(t)$ est la distance (en km) parcourue au temps t (en heure).

Exercice 17. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$. Montrer que f s'annule. Appliquer ceci aux polynï¿½mes de degré impair.

Exercice 18. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2x)$. Montrer que f est constante.

Exercice 19. Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continue telle que $f \circ f = f$. On note $E_f = \{x \in [0, 1] | f(x) = x\}$. Montrer que $E_f \neq \emptyset$ puis que c'est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice 20.

1. Peut-on prolonger la fonction suivante par continuité en 0 ?
$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{array}$$
2. Peut-on prolonger la fonction suivante par continuité en 0 ?
$$\begin{array}{rccl} g : & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x \left|1 + \frac{1}{x}\right| \end{array}$$

Exercice 21. Soit f la fonction réelle à valeurs réelles, strictement croissante définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \\ 8\sqrt{x} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de f.
2. f est elle continue ?

Université d'Orléans
UFR Sciences
Département de Mathématiques

Licence 1 – Semestre 1
décembre 2010

SLO1MA12 – Introduction au raisonnement mathématique 2 - Analyse
TD 5 – Dérivabilité

Exercice 1. Montrer que la fonction $x \longmapsto |x|$
(a) est dérivable en dehors de l'origine,
(b) n'est pas dérivable à l'origine,
(c) possède des dérivées à droite et à gauche à l'origine.

Exercice 2. Déduire les limites suivantes de dérivées classiques $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

1. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^\alpha - 1}{x-1}$ (α paramètre réel)
2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$
3. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1}$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$

Exercice 3. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \ln x - x$
2. $f(x) = \sin \frac{x+1}{2x+3}$
3. $f(x) = \sqrt{\frac{1+\sin^2 x}{1+\cos^2 x}}$
4. $f(x) = \operatorname{Arc}\tan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Exercice 4. Calculer les trois premières dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = e^{-x^2}$
2. $f(x) = \tan x$
3. $f(x) = \operatorname{Arc}\tan x$

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 ; on note encore f la fonction prolongée.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que f' n'est pas continue en 0.

Exercice 6. Déterminer la valeur des réels a et b pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ comme suit soit dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$:
– $f(x) = \sqrt(x)$ si $0 \leq x \leq 1$
– $f(x) = ax^2 + bx + 1$ si $x > 1$

Exercice 7. Démontrer les inégalités suivantes à l'aide de la formule des accroissements finis :

1. $e^x \geq 1 + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
2. $\ln x \leq x - 1$ pour tout $x \in]0, +\infty[$
3. $|\sin x| \leq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
4. $\frac{|x|}{x^2+1} \leq |\operatorname{Arc}\tan x| \leq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Exercice 8. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_m(x) = x^m\, e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$.
(a) Calculer la dérivée de f_m et faire un tableau de variation. Déterminer en particulier ses intervalles de croissance et de décroissance, ainsi que ses extrema.
(b) En déduire que f_m est bornée, puis que f_m tend vers 0 à l'infini.

Exercice 9. Déterminer les extrema de la fonction $x \mapsto x^3 - 3x$ sur $[-\frac{3}{2}, +\frac{5}{2}]$.

Exercice 10. Une statue de hauteur s est placée sur un piédestal de hauteur p. A quelle distance doit se placer un observateur (dont la taille est supposée négligeable) pour voir la statue sous un angle maximal ?

Exercice 11. Étudier les fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{x}{\ln x}$
2. $g(x) = 2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 4x}$
3. $h(x) = \frac{x-1}{x \ln(x)}$