

Séries.

Développement asymptotique de la série harmonique.

On pose $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$.

1. Déterminer un développement asymptotique de H_n comprenant quatre termes.
2. Etudier la convergence et la somme de la série $\sum \frac{1}{1^2 + \dots + n^2}$.
3. On pose $k_n = \min\{k \in \mathbb{N}; H_k \geq n\}$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_{n+1}}{k_n}$.

Etude des systèmes dynamiques discrets.

Soit une suite réelle (u_n) définie par la donnée de $u_0 \in I$ et de la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, où f désigne une application d'un intervalle I dans lui-même. On suppose de plus que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L \in I$ où L est un point fixe de f (sans devenir constante égale à L), et que f a un développement limité d'ordre 2 au voisinage du point fixe $L = f(L)$:

$$f(x) = L + f'(L)(x - L) + a(x - L)^2 + o(x - L)^2, \text{ avec } a \neq 0.$$

On introduit de plus le rapport $r_n = \frac{u_{n+1} - L}{u_n - L}$.

1. Déterminer la limite de la suite (r_n) puis montrer que $|f'(L)| \leq 1$ et étudier le signe de r_n selon le signe de $f'(L)$.
2. On suppose $f'(L) = 1$ et que $\forall n, u_n - L > 0$. Déterminer un réel b tel que $(u_{n+1} - L)^b - (u_n - L)^b$ ait une limite finie non-nulle. En déduire un équivalent de $u_n - L$.
3. On suppose $0 < f'(L) < 1$ et que $\forall n, u_n - L > 0$. On pose $v_n = \ln \left[\frac{u_n - L}{(f'(L))^n} \right]$. Etudier la convergence de la suite (v_n) . En déduire un équivalent de $u_n - L$.
4. On suppose $f'(L) = 0$ et on pose $w_n = \frac{\ln|u_n - L|}{2^n}$. Etudier la convergence de la suite (w_n) et en déduire un équivalent de $|u_n - L|$.

Séries de Hardy.

Déterminer la nature de la série $\sum \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ en traitant successivement les cas suivants :

1. $\alpha > 1$;
2. $1/2 < \alpha \leq 1$;
3. $\alpha = 1/2$ (on pourra effectuer un développement asymptotique de la différence $e^{i\pi\sqrt{n+1}} - e^{i\pi\sqrt{n}}$);
4. $\alpha < 1/2$.

Nature d'une série.

Quelle est la nature de la série $\sum \sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n)$?

Compléments à la règle de d'Alembert.

On considère une série à termes strictement positifs $\sum u_n$ telle que $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = L$.

1. Donner, si $0 < L < 1$, un équivalent du reste partiel R_n . Prouver, si $L = 0$, que R_n équivaut à u_{n+1} .
2. Donner, si $L > 1$, un équivalent de la somme partielle S_n .
3. On suppose $L = 1$ et, de plus, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. En déduire un développement de $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ à la précision $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, puis un équivalent de u_n . En déduire dans ce cas la nature de la série $\sum u_n$ en fonction des valeurs du nombre a .
4. Etudier la nature de $\sum u_n$ en fonction des réels positifs a, b, c, d lorsque :

$$u_n = \frac{(a+1)(a+2)\dots(a+n)(b+1)\dots(b+n)}{(c+1)(c+2)\dots(c+n)(d+1)\dots(d+n)}.$$