

Séries.

Inégalité de Carleman.

Montrer qu'il existe une constante universelle C telle que, pour toute série convergente à termes positifs $\sum a_n$ on ait l'inégalité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_1 \dots a_n)^{\frac{1}{n}} \leq C \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

Quelle est la plus petite valeur possible de C ?

Espaces de suites classiques.

On considère les espaces vectoriels normés suivants :

- l^∞ formé des suites bornées $u = (u_n)$ de \mathbb{R} ou \mathbb{C} , normé par : $\|u\|_\infty = \sup\{|u_n|, n \in \mathbb{N}\}$.
- c_0 , son sous-espace constitué des suites convergeant vers 0.
- l^1 , formé des suites $u = (u_n)$ de \mathbb{R} ou \mathbb{C} telles que $\sum |u_n|$ converge, normé par : $\|u\|_1 = \sum_{\mathbb{N}} |u_n|$.

Enfin, le dual topologique d'un e.v.n. est l'ensemble de ses formes linéaires continues.

1. A toute suite $v = (v_n)$ de l_1 , on associe l'application $\phi_v : u \in c_0 \mapsto \sum_{\mathbb{N}} u_n v_n$.
Montrer que la série $\phi_v(u)$ converge, $\forall u \in c_0$.
Montrer que ϕ_v est une forme linéaire continue sur c_0 et préciser sa norme subordonnée.
Montrer que $(v \mapsto \phi_v)$ est linéaire, bijective et isométrique (donc conservant la norme) de l_1 dans le dual topologique $(c_0)'$ de c_0 .
2. A toute suite $v = (v_n)$ de l^∞ , on associe l'application $\phi_v : u \in l^1 \mapsto \sum_{\mathbb{N}} u_n v_n$.
Montrer que la série $\phi_v(u)$ converge pour tout $u \in l^1$.
Montrer que ϕ_v est une forme linéaire continue sur l^1 et préciser sa norme subordonnée. Montrer que $(v \mapsto \phi_v)$ est linéaire, bijective et isométrique (donc conservant la norme) de l^∞ dans le dual $(l^1)'$ de l^1 .
3. Etudier si les espaces normés c_0, l^1, l^∞ sont de Banach.

Etude de séries doubles.

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs ou nuls.

1. On suppose que la série $\sum a_n$ converge. Montrer que $\sum \frac{a_n}{n(n+1)}$ converge. Montrer que $\sum_{k=0}^{\infty} k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{a_n}{n(n+1)}$ existe et comparer sa valeur à $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
2. On suppose que la série $\sum \sqrt{n} a_n$ converge et on pose pour $n \geq 0$, $w_n = \sum_{p=n}^{\infty} a_p^2$. Montrer l'existence de w_n et la convergence de la série $\sum \sqrt{\frac{w_n}{n}}$.

Recherche d'un équivalent.

Pour $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, déterminer un équivalent de

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{(n\alpha)^k}{k!} \text{ et } v_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(n\alpha)^k}{k!}.$$

Séries de Hardy.

(cf. colle 10).

Etude asymptotique à l'aide de transformations d'Abel.

Soit $\sum a_n$ une série de réels convergente.

1. Montrer que pour n tendant vers l'infini, $\sum_{k=1}^n ka_k = o(n)$.
2. On suppose de plus qu'il existe $c > 0$ tel que, $\forall n \geq 1$, $na_n > -c$. Montrer que pour n tendant vers l'infini,

$$\sum_{k=1}^n k|a_k| \leq 2cn + o(n).$$

3. On se place sous les hypothèses du 2. On pose, pour $n \geq 1$, $t_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|a_k|}{k}$. Justifier l'existence de t_n et montrer que pour n tendant vers l'infini, $t_n = O(1/n)$.