Séries de fonctions.

Etude de continuité.

On suppose que la série complexe $\sum a_n$ converge. On pose pour $h \neq 0$,

$$f(h) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2.$$

Etudier l'existence et la continuité de f. La fonction f admet-elle une limite en 0 ?

Convergence de $\sum b_n \sin nt$.

Soit $(b_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle décroissante qui converge vers 0.

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} b_n \sin nt$ converge uniformément sur tout segment $[\alpha, 2\pi - \alpha]$, pour $0 < \alpha < \pi$.
2. Montrer l'équivalence des deux conditions :
   (a) $b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ lorsque n tend vers l'infini ;
   (b) la série $\sum_{n\geq 1} b_n \sin nt$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Série normalement convergente de somme non-dérivable.

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$ n'est pas dérivable en 0.

Série de primitives successives.

Soit $f_0 : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue avec $a < b$. On définit une suite de fonctions $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ par $f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [a,b]$.
Etudier et évaluer la fonction $g : x \in [a,b] \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Equivalent d'une série de fonctions.

On note $u_n(x) = \frac{x^n}{1-x^n}$ et $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

1. Etudier la définition, la continuité et la dérivabilité de f.
2. Donner un équivalent de f et 1^-.
3. Démontrer que pour $|x| < 1$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n) x^n$ où $d(n)$ désigne le nombre de diviseurs positifs de n.

Sur le théorème d'intégration d'une série de fonctions.

Soit $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, pour $n \in \mathbb{N}$, une suite de fonctions continues. On suppose que la série $\sum \int_a^b |f_n|$ converge.

1. Peut-on dire que pour tout $t \in [a,b]$, la série $\sum |f_n(t)|$ converge ?
2. Montrer que l'ensemble des $x \in [a,b]$ tels que la série $\sum |f_n(x)|$ converge est dense dans $[a,b]$.
3. Construire une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les hypothèses de l'énoncé telle que $\{x \in [a,b]; \sum |f_n(x)| \text{ diverge } \}$ est dense.

Développement eulérien de cotangente.

On pose pour x réel, $f(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} \dfrac{1}{x+k}$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.
2. Vérifier les égalités ci-dessous :
   (a) pour $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, $f(-x) = -f(x)$;
   (b) pour $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, $f(x+1) = f(x)$;
   (c) pour $x \in \mathbb{R}\backslash\frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $f(2x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)$.
3. Montrer que la fonction $x \mapsto f(x) - \pi\text{cotan}(\pi x)$ admet un prolongement continu à $\mathbb{R}$ tout entier.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, $f(x) = \pi\text{cotan}\pi x$.