Groupes

Un cas particulier du lemme de Cauchy.

Soit G un groupe de cardinal $2p$ avec p premier. Motrer que G contient un élément d'ordre p.

Puissances dans un groupe abélien d'exposant fini.

Soit G un groupe abélien. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = 1, \forall x \in G$.

1. On suppose que $n = ab$ avec $a \wedge b = 1$. On pose $G_a = \{x^a, x \in G\}$. Montrer que G_a est un sous-groupe de G.
   Montrer que pour tout $x \in G$, $\exists!(u, v) \in G_a \times G_b$ tel que $x = uv$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \wedge n = 1$. Montrer que $f_k : (x \mapsto x^k)$ est un automorphisme.
   Déterminer l'application réciproque.

Groupes quasi-cycliques de Prüfer.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ un entier premier et U_p le sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$ engendré par les $(e^{\frac{2i\pi}{p^\alpha}})_{\alpha \in \mathbb{N}}$.
Montrer que U_p est indécomposable, i.e. non-isomorphe à un produit direct de deux groupes non-triviaux.

Groupes dont l'ensemble des sous-groupes finis est fini.

Caractériser les groupes dont l'ensemble des sous-groupes est fini.

Morphismes de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z}$.

Trouver tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$.

Plongement de $\mathcal{S}_n$ dans A_{n+2}.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un morphisme injectif de $\mathcal{S}_n$ dans A_{n+2}.