

Séries entières.

Calcul de la somme d'une série entière.

Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(na)x^n}{n}$ où a et x sont des nombres réels.

Calculs de sommes de séries alternées.

1. Calculer la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.
2. Etudier la convergence et calculer la somme de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} \right)$, pour $n \geq 0$.

Partitions d'un entier en parts fixées.

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et a_1, \dots, a_k des entiers naturels non-nuls premiers entre eux dans leur ensemble. Pour $n \geq 1$, on note u_n le nombre de k -uplets $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k$ tels que $a_1x_1 + \dots + a_kx_k = n$. Déterminer un équivalent de u_n en $+\infty$ en développant en série entière $\prod_{i=1}^k \frac{1}{1-z^{a_i}}$.

Comparaison de sommes de séries quand $\lim \frac{a_n}{b_n} = l$.

Soient (a_n) et (b_n) deux suites de nombres complexes. On note R et R' les rayons de convergence respectifs de $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ et, sous réserve de convergence, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

On suppose que (b_n) est à valeurs dans \mathbb{R}_+^* et qu'il existe $l \in \mathbb{C}$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

1. Montrer que $R \geq R'$.
2. On suppose que $R' = 1$ et que $\sum b_n$ diverge. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.
3. On suppose que $R' = +\infty$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.
4. Soit $p \in \mathbb{N}$. Déterminer la limite lorsque x tend vers 1^- de $(1-x)^{p+1} \lim_{n \rightarrow \infty} n^p x^n$.

Un théorème de Gauss.

On considère le plan \mathbb{R}^2 muni de sa structure euclidienne canonique. Pour $x \geq 0$, on pose :

$$q(x) = \#\{a \in \mathbb{Z}^2, \|a\| \leq x\} \text{ et } q_+(x) = \#\{a \in \mathbb{N}^2, \|a\| \leq x\},$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne de \mathbb{R}^2 .

1. Trouver un équivalent de $q(x)$ et de $q_+(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.
2. On pose pour $t \in]-1, 1[$, $g(t) = \frac{1}{1-t} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^{n^2} \right)^2$. Relier g et q_+ . Donner un équivalent de g en 1^- .

Equation de Bessel.

On considère l'équation de Bessel :

$$xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0.$$

Soit $J(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ une solution développable en série entière de rayon $R > 0$.

1. A quelle condition sur la suite (a_k) la fonction J est-elle solution de l'équation ? Exprimer a_{2k} en fonction de k et de a_0 et déterminer le rayon de convergence.
2. Soient J_0 la fonction de Bessel définie en prenant $a_0 = 1$ et K_0 la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$:

$$K_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin(\theta)) d\theta.$$

Etablir que K_0 est de classe \mathcal{C}^2 et montrer que $xK_0''(x) + K_0'(x) + xK_0(x) = 0$.

3. Etablir que K_0 est développable en série entière sur \mathbb{R} et montrer que $K_0 = J_0$.