Séries de Fourier.

Série entière à coefficients entiers, bornée sur son disque de convergence.

Soit (a_n) une suite de $\mathbb{Z}$ telle que lasérie $\sum a_n z^n$ ait un rayon de convergence $R \geq 1$. On pose $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour $|z| < 1$ et on suppose que f est bornée sur le disque ouvert $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$. Montrer que f est un polynôme.

Majoration de la norme de la dérivation.

Soit $P(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}$ un polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à n, où les a_k sont des nombres complexes. Trouver une constante c ne dépendant que de n telle que :

$$||P'||_\infty \leq ||P||_\infty.$$

On pourra poser $F_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \dfrac{|k|}{n}\right) e^{ikx}$ et considérer l'intégrale $I_n(x) = \int_0^{2\pi} P(x-y)F_n(y)\sin(ny)dy$.

Inégalité de Wirtinger.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Démontrer l'inégalité de *Wirtinger* :
$$\int_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f\right)^2 \leq \int_0^{2\pi} f'^2.$$
2. Soit $g \in \mathcal{C}^{\in}([0,\pi],\mathbb{R})$ non-nulle, telle que $g(0) = g(\pi) = 0$. Montrer que :
$$\inf\{\frac{g''(x)}{g(x)}, x \in]0,\pi[, g(x) \neq 0\} \leq 1.$$

Résolution d'une équation différentielle.

Soit H l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^p$, continues et 2π-périodiques telles que $\sum n^4(|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2)$ converge, où $|\cdot|$ est la norme hermitienne de $\mathbb{C}^p$. Si $f \in H$, on pose :

$$N(f) = \sqrt{|c_0(f)|^2 + \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^4 |c_n(f)|^2}.$$

1. Montrer que N est une norme et que, si $f \in H$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ et il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $f \in H$, $||f'||_\infty \leq \alpha N(f)$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, symétrique, $g \in H$ et $C > 0$. Montrer qu'il existe un unique élément $f \in H$ tel que $f - g + \dfrac{C}{2}A(f' + g') = 0$. Montrer que $N(f) = N(g)$.

Etude de convergence uniforme.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{C}^k_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^k$ et $H_k = \{f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}, \sum_{n \in Z} n^{2k} |c_n(f)|^2 < \infty\}$.

1. Montrer que $H_{k+1} \subset \mathcal{C}^k_{2\pi}$. Que peut-on dire de l'inclusion inverse ?
2. Soit $k \geq 1$. Montrer que, pour tout réel $a > 0$ et tout $f \in H_k$, il existe un unique $g \in H_{k+2}$ tel que $g'' = \dfrac{g-f}{a}$.
3. Soit $f_0 \in H_1$ et $a > 0$. On définit la suite (f_p) par $f''_{p+1} = \dfrac{f_{p+1} - f_p}{a}$. Etudier la convergence de la suite (f_p).
4. Pour $t \in [pa, (p+1)a[$, on pose $F_a(t, x) = f_p(x)$. Donner les coefficients de Fourier de $x \mapsto F_a(t, x)$. Etudier la convergence uniforme de (F_a) lorsque a tend vers 0.

Le phénomène de Gibbs.

1. Calcler les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique f qui est affine sur $[0, 2\pi[$ et vérifie $f(0) = 0$, $\lim_{x \to (2\pi)^-} f(x) = 2\pi$.
2. Soit s_n la somme partielle d'indice n de sa série trigonométrique. Déterminer les extrema de s_n. Soit m_n le premier minimum de s_n sur $[0, 2\pi[$. Etudier le comportement de la suite (m_n). Interpréter.

Fonctions dont la série des coefficients de Fourier converge absolument.

Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des applications 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que la série $\sum c_n(f)$ soit absolument convergente.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et que tout élément de $\mathcal{B}$ estsomme de sa série de Fourier.
2. Pour $f \in \mathcal{B}$, on pose $||f|| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|$. Montrer ue l'on définit ainsi une norme pour laquelle $\mathcal{B}$ est complet.
3. Montrer que $(f, g) \in \mathcal{B}^2$ implique $fg \in \mathcal{B}$ et $||fg|| \leq ||f|| ||g||$.