

## Intégrales dépendant d'un paramètre, séries de fonctions sommables, intégrales doubles.

### Calcul.

Soient  $a > 1$  et  $b > 1$ . Calculer  $\int_0^\pi \ln \left( \frac{b - \cos x}{a - \cos x} \right) dx$ .

### Calcul.

Calculer  $\int_0^\infty \frac{\cos(t)}{1+t^2} dt$ .

### Mesure du domaine d'annulation d'une fonction.

Soit  $f$  une fonction continue de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}_+$  et  $g$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}_+$  définie par  $g(x) = \int_0^1 \sqrt{x^2 + f(t)} dt$ .

1. Montrer que  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$ .
2. On suppose que  $\{t \in [0, 1], f(t) = 0\} = [a, b] \subset [0, 1]$ . Calculer  $g'_d(0)$ .

### Recherche d'un équivalent.

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , continue et telle que  $f(0) \neq 0$ .

1. Donner un équivalent en  $+\infty$  de  $g(t) = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+tx} dx$ .
2. Majorer la différence entre  $g$  et cet équivalent quand  $f$  est  $\mathcal{C}^1$ .

### Développement en série entière de $x \mapsto (\text{Arcsin}x)^2$ .

1. Calculer  $I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^n dx$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
2. Calculer  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1-t \cos x}$  pour  $|t| < 1$ .
3. En déduire le développement en série entière de  $x \mapsto (\text{Arcsin}x)^2$ .