Dérivation et intégration des fonctions d'une variable réelle à valeurs dans un espace normé.

Inégalité de Hardy.

Soit E l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $||f|| = \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)^2 dx\right)^{1/2} < \infty$. On note $g(x)$ la moyenne de f entre 0 et x : $g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

1. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$ et que, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^x g(t)^2 dt = 2\int_0^x f(t)g(t)dt - xg(x)^2.$$

2. En déduire que $\left(\int_0^x g^2\right)^{1/2} \leq \left(\int_0^\infty f^2\right)^{1/2}$ pour $x \geq 0$, et que $g \in E$ avec $||g|| \leq ||f||$.
3. Montrer que l'application $f \mapsto g$ de E dans lui-même, muni de la norme ci-dessus, est continue, de norme 2.

Identité d'Euler des fonctions homogènes.

Soient une fonction $f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$, différentiable en tout point, et k une constante réelle. Montrer que f est homogène de degré k (i.e. $f(tx) = t^k f(x)$ pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$) ssi elle vérifie l'identité d'Euler

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = kf(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}.$$

Théorème de Sard en dimension 1.

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On note C l'ensemble des $x \in I$ tels que $f'(x) = 0$ (*points critiques de* f), et $f(C)$ l'ensemble des *valeurs critiques*. Montrer que $f(C)$ est une partie de mesure nulle de $\mathbb{R}$ (i.e. $\forall \varepsilon > 0$, $f(C)$ est contenu dans une réunion d'intervalles dont la somme des longueurs est inférieure à ε).